CAPIRE IL CALCOLO INFINITESIMALE

PRESENTAZIONE

Questo testo è la continuazione naturale del mio scritto "Capire i numeri e l'aritmetica", dove ho spiegato i concetti di base dell'aritmetica e dell'algebra, e come utilizzarli.
L'algebra permette di esprimere e risolvere relazioni tra quantità fisse, ma molti problemi reali riguardano quantità che cambiano: grandezze che variano con continuità in funzione di altre grandezze a loro volta variabili, come ad esempio il moto dei corpi, la crescita delle popolazioni, la diffusione del calore, l'andamento dei mercati, la forma delle curve, e molto altro.
È proprio in questi casi che l'algebra non basta più, e diventa necessario il calcolo infinitesimale.
Questo scritto vuole appunto spiegare i concetti di base del calcolo infinitesimale e come utilizzarlo per tradurre in forma matematica, e risolvere, problemi di questo tipo.

NUMERI DECIMALI

I numeri decimali sono numeri razionali (frazioni) con denominatore 10 o potenze positive di 10 (p. es. 357/10, 8/1000, ecc.). Sono quindi numeri decimali quelli rappresentati da frazioni che hanno al denominatore i soli fattori 2 e 5, perché equivalenti a frazioni con denominatore 10 o potenze positive di 10 (p. es. 3/2 = 3*5/2*5 = 15/10, 8/25 = 8*4/25*4 = 32/100, ecc.).

I numeri decimali si possono scrivere in **forma decimale** eseguendo la divisione tra numeratore e denominatore: la parte intera del quoziente si scrive prima della virgola, mentre le cifre ottenute proseguendo ulteriormente con la divisione del resto, si scrivono dopo la virgola e costituiscono la parte decimale (p. es. 357/10 = 35,7; 8/1000 = 0,008).

La forma decimale è utile perché permette il confronto immediato fra numeri. P. es. è immediato riconoscere che 7,3582 è maggiore di 7,3579659 perché hanno stesse cifre fino alla seconda cifra decimale, e la terza cifra decimale del primo numero è maggiore di quella del secondo.

Se a un numero decimale si aggiungono degli 0 all'ultima cifra decimale il suo valore non cambia. P es. 3,7 = 3,700 perché 3,7 = 37/10 e 3,700 = 3700/1000 = 37*100/10*100 = 37/10.

Dati due numeri decimali, vicini quanto si vuole, fra di essi esistono sempre infiniti numeri decimali, più grandi del più piccolo dei due numeri e più piccoli del più grande (quindi l'insieme dei numeri decimali è denso). Ciò è immediatamente comprensibile considerando che il valore medio di due numeri qualsiasi a e b, cioè (a+b)/2, è intermedio fra a e b. E il procedimento si può ripetere all'infinito, considerando successivamente i valori medi fra i due numeri e i valori intermedi via via calcolati, che sono tutti intermedi fra a e b. Ne segue che, dato un numero decimale, non esiste il suo numero successivo, perché tra essi esisterebbero comunque infiniti numeri decimali.

I numeri razionali (frazioni) che hanno al denominatore fattori diversi da 2 e 5 (p. es. 1/3, 3/13, ecc.) non sono numeri decimali. Se si prova a scriverli in forma decimale eseguendo la divisione tra numeratore e denominatore, la divisione non finisce mai e le cifre da aggiungere dopo la virgola sono infinite. Quindi è

impossibile esprimere questi numeri razionali in forma decimale: si potrà solo approssimarli a numeri decimali con la precisione voluta.
Per i numeri razionali non decimali, continuando la divisione accade che una o più cifre si ripetano periodicamente. Si usa rappresentare tale condizione mettendo fra parentesi le cifre del periodo, che si ripetono periodicamente, p. es. 1/3 = 0,(3), 3/13 = 0,(230769). Ma attenzione! 0,(3) e 0,(230769) non sono numeri (che si possono sommare, sottrarre, ecc.), ma solo scritture abbreviate (come 0,333... e 0,2307692307...) per indicare con semplicità i numeri decimali che possono approssimare 1/3 e 3/13.

I numeri radicali e logaritmici in genere non si possono rappresentare con frazioni e sono quindi detti irrazionali. Anche per questi numeri, se si prova a scriverli in forma decimale eseguendo per tentativi le rispettive operazioni di radice e logaritmo con numeri decimali sempre meglio approssimati, l'operazione non finisce mai e le cifre da aggiungere dopo la virgola sono infinite. P. es. per scrivere sqrt(2) in forma decimale si individuano per tentativi le cifre decimali successive. La prima cifra decimale di sqrt(2) è 4, perché 1,4^2 = 1,96 < 2 e 1,5^2 = 2,25 > 2, quindi sqrt(2)=1,4... La seconda cifra decimale di sqrt(2) è 1, perché 1,41^2 = 1,9881 < 2 e 1,42^2 = 2,0164 > 2 quindi sqrt(2)=1,41... e così via. Ma per i numeri irrazionali, a differenza dei numeri razionali non decimali, le cifre decimali si susseguono in modo non periodico.
E anche in questo caso le scritture sqrt(2) = 1,41421356237... o log(10; 7) = 0,84509804001... non sono numeri (che si possono sommare, sottrarre, ecc.), ma solo scritture abbreviate per indicare con semplicità i numeri decimali che possono approssimare sqrt(2) e log(10; 7).

OPERAZIONI TRIGONOMETRICHE

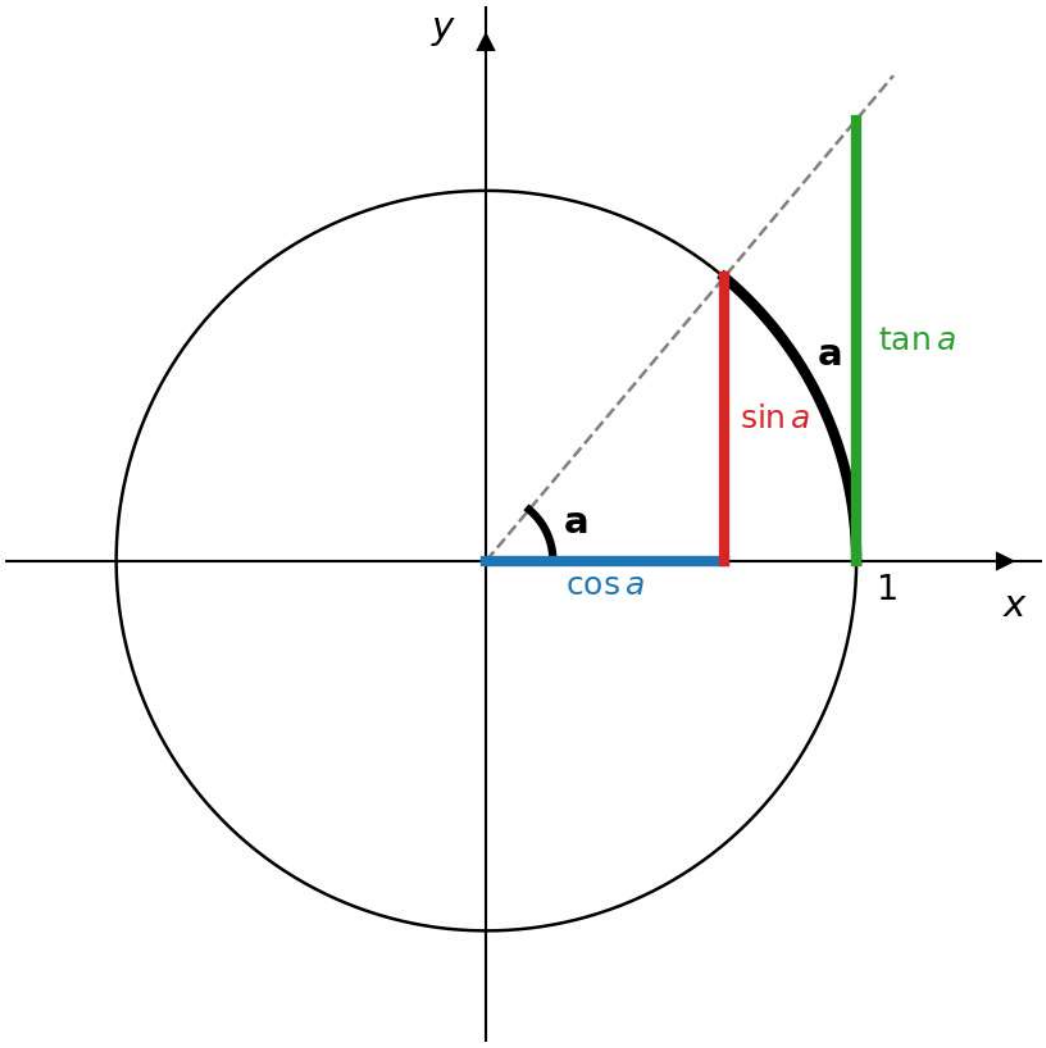
Oltre alle 7 operazioni aritmetiche (somma, sottrazione, moltiplicazione, divisione, potenza, radice, logaritmo) è utile definire anche l'operazione seno (indicata con sin), che mette in relazione corde e archi di cerchio, e dà le misure delle semicorde sottostanti semiarchi della circonferenza di raggio pari a 1. La figura sotto rappresenta una circonferenza di raggio 1: il segmento in colore rosso indica il valore del seno sin(a) dell'arco a (o dell'angolo a, corrispondente all'arco, in colore nero).

È utile definire anche altre due operazioni trigonometriche, derivate dall'operazione seno: le operazioni coseno (indicata con cos, in figura il segmento in colore azzurro indica il valore del coseno dell'arco a) e tangente (indicata con tan, in figura il segmento in colore verde indica il valore della tangente dell'arco a).

L'operazione coseno deriva dal seno tramite la relazione [cos(a)]^2 + [sin(a)]^2 = 1.

L'operazione tangente deriva dal seno tramite la relazione tan(a) = sin(a)/cos(a).

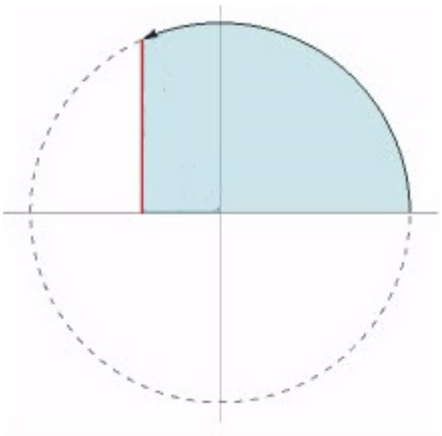
Si noti che le operazioni trigonometriche danno risultati periodici, che si ripetono uguali all'aumentare dei numeri rispetto ai quali sono calcolate, quando tali numeri differiscono fra loro per valori uguali alla circonferenza di raggio 1, o suoi multipli, perché gli archi individuati da tali numeri sulla circonferenza sono gli stessi.



NUMERI REALI

I numeri reali sono numeri che si possono approssimare con la precisione voluta con numeri decimali. Quindi, come abbiamo visto, i numeri ottenibili con le 7 operazioni aritmetiche (somma, sottrazione, moltiplicazione, divisione, potenza, radice, logaritmo) sono numeri reali.

Ma esistono anche numeri reali ottenibili con modi diversi dalle 7 operazioni aritmetiche, p.es. pi greco, che è la misura della circonferenza di diametro pari a 1 (pi = 3,14159265359...), oppure i numeri ottenibili con le operazioni trigonometriche, p. es. sin(2) = 0,909297... (la misura del segmento in rosso nel disegno sotto).



RETTA NUMERICA

È utile, per la comprensione dei concetti, poter visualizzare i numeri e le loro relazioni per mezzo di grafici. Il primo passo in tale direzione è mettere in corrispondenza i punti di una retta e i numeri reali. Sulla retta si sceglie un punto origine O a cui è assegnato il numero 0. Si sceglie un verso positivo (di norma da O verso destra). Nel verso positivo si sceglie un segmento unità di misura OU, a U è assegnato il numero 1. È evidente che a ogni numero intero corrisponde un punto sulla retta: per individuarlo basta aggiungere tante volte il segmento OU quante indica il numero da rappresentare, a destra nel caso di numeri positivi, a sinistra nel caso di numeri negativi.

Anche a ogni numero razionale corrisponde un punto sulla retta, dato che con riga e compasso si può dividere un segmento in tante parti uguali quante si vuole. P. es. a 29/13 corrisponde il punto sulla retta individuato dividendo prima il segmento OU in 13 parti, poi, a partire da O, aggiungendo una di tali parti per 29 volte. Ne segue ovviamente che anche a ogni numero decimale, essendo un numero razionale, corrisponde un punto sulla retta.

È anche possibile individuare il punto della retta corrispondente ad alcuni numeri radicali. P. es. sqrt(2) è la lunghezza della diagonale del quadrato di lato 1, quindi se si costruisce con riga e compasso tale quadrato e si riporta la lunghezza della sua diagonale sulla retta numerica a partire da O, si ottiene il punto che corrisponde a sqrt(2).

Ma per la generalità dei numeri radicali e logaritmici simili costruzioni geometriche non sono possibili. Quindi la domanda è: a tali numeri corrisponde un punto sulla retta? E più in generale: a ogni numero reale corrisponde un punto sulla retta?

Abbiamo visto che qualsiasi numero reale si può approssimare con la precisione voluta con numeri decimali, quindi si può rappresentare con una scrittura abbreviata che indica che ha infinite cifre dopo la virgola, p.es. log(10; 7) = 0,84509804001... A ognuno di questi numeri decimali, che via via che si procede con l'individuazione delle successive cifre decimali, approssima sempre meglio il nostro numero reale, corrisponde un punto sulla retta. La domanda è: se si procede indefinitamente con l'individuazione delle successive cifre decimali del nostro numero reale, si arriva a individuare un punto sulla retta, che quindi corrisponde al nostro numero reale?
Per rispondere a questa domanda consideriamo il numero razionale 29/13. Abbiamo visto che corrisponde al punto sulla retta ottenuto aggiungendo 29 volte la 13esima parte del segmento unità di misura OU. Ma 29/13 si può rappresentare in scrittura decimale con la scrittura abbreviata che indica che ha infinite cifre dopo la virgola 29/13 = 2,(230769) = 2,23076923076... Ciò indica che se si procede indefinitamente con l'individuazione delle successive cifre decimali (e dei corrispondenti punti sulla retta), si arriva a individuare il punto sulla retta che corrisponde a 29/13, che era stato precedentemente individuato. Questo esempio mostra che quindi, in generale, la procedura di individuazione delle successive cifre decimali di un numero reale (e dei corrispondenti punti sulla retta), da doversi ripetere indefinitamente nel caso di numeri non decimali, porta a individuare un punto sulla retta, che corrisponde a tale numero reale.
Ovviamente ciò non significa che in pratica aggiungiamo infiniti segmenti corrispondenti alle successive cifre decimali per individuare il punto esatto della retta che corrisponde a un numero reale. Con questa procedura in pratica non individueremmo mai il punto esatto perché richiederebbe un tempo infinito. Ma nel ragionamento matematico il tempo non esiste, ed è perfettamente legittimo considerare operazioni ripetute un numero indefinito di volte.
D'altra parte i numeri reali stessi non hanno alcuna importanza pratica, visto che per ogni applicazione si usano numeri decimali che li approssimano col grado voluto. I numeri reali sono solo un utile strumento matematico, in quanto permettono di usare le operazioni aritmetiche e trigonometriche che li implicano.
Ciò che qui importa è aver stabilito che a ogni numero con infinite cifre decimali, cioè a ogni numero reale, corrisponde un punto della retta (indipendentemente dal fatto che riusciamo a individuarlo praticamente).
A ogni numero reale corrisponde un punto sulla retta, ma a ogni punto della retta corrisponde un numero reale?
Si può rispondere considerando la seguente procedura. Dato un punto P sulla retta, si conta quante volte il segmento unità OU è contenuto nel segmento OP (p.es. 2). Poi per la parte residua di OP (minore di OU) si conta quante volte un decimo della lunghezza del segmento unità OU è contenuto in essa (p. es. 7). Ancora, per la parte residua di OP (minore di un decimo di OU) si conta quante volte un centesimo della lunghezza del segmento unità OU è contenuto in essa (p. es. 8). E così via indefinitamente si costruisce un numero con infinite cifre decimali (nel nostro caso 2,78...), che appunto è un numero reale.
Ne segue che a ogni numero reale corrisponde un punto della retta numerica, e a ogni punto della retta corrisponde un numero reale.

FUNZIONI

Una funzione in matematica è una relazione fra 2 grandezze variabili esprimibili con numeri, per cui al valore di una variabile (detta indipendente) corrisponde **un solo valore** dell'altra variabile (detta dipendente), p. es. la temperatura di una città (varabile dipendente) nel tempo (variabile indipendente). La relazione può essere anche fra più di 2 variabili, in tal caso a ogni insieme di valori delle variabili indipendenti corrisponde un solo valore della variabile dipendente (che è sempre una sola).

Se le variabili sono numeri reali e la loro relazione è definita per mezzo delle 7 operazioni aritmetiche (somma, sottrazione, moltiplicazione, divisione, potenza, radice, logaritmo) e delle operazioni trigonometriche, p. es. y = (x-2)*(x+5) dove y è la variabile dipendente e x la variabile indipendente, la funzione si dice aritmetica: è analizzabile con tecniche matematiche quali algebra e calcolo infinitesimale e, dato il valore di una variabile, si può calcolare il valore dell'altra.
Molti fenomeni naturali o sociali possono essere descritti utilizzando funzioni. Se a esse si riesce a dare forma aritmetica, la matematica diventa uno strumento utile per descrivere tali fenomeni e poterne prevedere l'evoluzione.

CASI PARTICOLARI

1) Frazioni con denominatore 0

Il risultato di una frazione con denominatore 0 e numeratore diverso da 0 (p.es. 5/0) non esiste, perché tale frazione rappresenta il numero che moltiplicato per 0 dà il numeratore, ma tale numero non esiste, perché ogni numero moltiplicato per 0 dà sempre 0, non dà mai un numero diverso da 0.
Invece il risultato di una frazione con denominatore e numeratore uguale a 0 (cioè 0/0) è indeterminato, perché tale frazione rappresenta il numero che moltiplicato per 0 dà 0, e ciò è vero per ogni numero.
Per questi motivi una funzione fratta, in cui la variabile compare al denominatore di una frazione (p. es. y = 5/(x-1)) non è definita per i valori della variabile che rendono il denominatore uguale a 0 (nel nostro caso la funzione non è definita per x =1).

2) Radici con indice intero pari

Non bisogna confondere numeri e funzioni: sono concetti matematici diversi. Visto che in una funzione a un dato valore della variabile indipendente deve corrispondere **un solo valore** della variabile dipendente, ne segue che alcune operazioni aritmetiche che compaiono in una funzione devono avere delle limitazioni rispetto alle stesse operazioni fra numeri.
Fra numeri, le radici di indice intero pari danno due risultati opposti, p. es. sqrt(4) = 2 e -2. Ma quando tali radici compaiono in una funzione, p. es. y = sqrt(4), per convenzione si considera solo il risultato positivo.
Inoltre, una funzione in cui la variabile compare sotto una radice di indice intero pari è definita solo per i valori della variabile che rendono il radicando >=0, perché per valori del radicando <0 la radice non esiste.
P. es. y = sqrt(x-1) è definita solo per x-1 >=0, cioè x >=1.

3) Potenze con esponente razionale

Una potenza con esponente frazionario corrisponde a 1) una radice con indice uguale al denominatore 2) elevata a una potenza con esponente uguale al numeratore, oppure a 1) una potenza con esponente uguale al numeratore 2) da cui si estrae una radice con indice uguale al denominatore. Le due operazioni sono entrambe lecite.
Per convenzione la frazione che rappresenta l'esponente deve essere ridotta ai minimi termini, quindi o il numeratore è pari e il denominatore dispari, o viceversa.
Il caso in cui il denominatore è pari ricade nel caso delle radici con indice intero pari visto precedentemente, quindi anche in tal caso la funzione si considera definita solo per valori della base >=0, perché per valori della base <0 la radice non esiste.

4) Potenze con esponente irrazionale

I numeri irrazionali non si possono rappresentare con frazioni. Si possono approssimare con la precisione voluta con numeri decimali, ma che il numero decimale scelto per approssimarli riconduca a una frazione con denominatore pari o dispari è arbitrario, perché dipende dall'approssimazione scelta. Pertanto occorre

porsi nel caso più limitante (esponente con denominatore pari), e, come già visto, la funzione si considera definita solo per valori della base >=0. P. es. y = (x-1)^(pi) è definita solo per x-1 >=0, cioè x >=1.
Un discorso analogo vale per le funzioni esponenziali, dove nell'esponente di una potenza compare la variabile indipendente, che può essere un qualsiasi numero reale, p.es. y = (x-1)^x. Quindi anche in questo caso la funzione è definita solo quando la sua base è >=0, ma visto che se la base è 0 la funzione si riduce al banale y =0, per convenzione le funzioni esponenziali si considerano definite quando la loro base è >0, quindi la funzione del nostro esempio è definita per (x-1) >0, cioè x >1.
5) Logaritmi, qui rappresentati con la scrittura log(base; argomento): log(a; b) è il logaritmo di b in base a
Il logaritmo di un numero in una certa base è un'operazione inversa della potenza: è l'esponente che occorre dare alla base per ottenere il numero.
Quindi se la variabile indipendente compare nell'argomento o nella base del logaritmo, p.es. y = log(x-1; x+2), operazione inversa di (x-1)^y=x+2, visto che la variabile y può essere un qualsiasi numero reale, per il ragionamento fatto per le potenze con esponente irrazionale, occorre che la base sia >=0, il che comporta necessariamente che anche l'argomento sia >=0. Quindi la funzione logaritmo parrebbe definita per valori della base e dell'argomento >=0.
Ma se la base è =0 allora anche l'argomento deve essere necessariamente =0, e viceversa se l'argomento è =0 allora anche la base deve essere =0, perché il logaritmo è operazione inversa della potenza, e una potenza può essere =0 solo se la base è =0. Quindi p. es. y = log(x-1; x+2) diverrebbe y = log(0; 0) che equivarrebbe a 0^y = 0, che sarebbe vera per ogni valore di y >0, cioè y sarebbe indeterminato. Ne segue che la funzione logaritmo non esiste se la base o l'argomento è uguale a 0, perché il suo valore sarebbe indeterminato. Pertanto la funzione logaritmo è definita solo per valori dell'argomento e della base >0.
Un discorso simile vale se la base è 1: in tal caso anche l'argomento è necessariamente uguale a 1, e la funzione diverrebbe y = log(1; 1) che equivarrebbe a 1^y = 1, che sarebbe vera per ogni valore di y, e quindi di nuovo la funzione non esiste perché il suo valore sarebbe indeterminato. Pertanto, ricapitolando, la funzione logaritmo è definita solo per valori dell'argomento >0 della base >0 e ≠1.
6) Operazioni trigonometriche
Come si può facilmente visualizzare sulla circonferenza trigonometrica di raggio 1, le operazioni trigonometriche danno gli stessi risultati per archi che differiscono fra loro di 2(pi). Ne segue che le funzioni trigonometriche, in cui la variabile compare nell'argomento, sono funzioni periodiche, i cui valori si ripetono uguali quando i loro argomenti differiscono di 2(pi). P. es. y = sin(2x) è una funzione periodica con periodo pi.
7) Funzioni composte
Per le funzioni in cui compare insieme più di un caso di quelli visti in precedenza, ci si pone nella "situazione peggiore": tali funzioni si considerano non definite per ogni valore della variabile per cui ogni singolo caso risulta non definito. P. es. y = x^(pi) + 1/(x-2) non è definita né per x <=0 né per x =2.

FUNZIONI CONTINUE
Data una funzione aritmetica o trigonometrica, la varabile dipendente, per i valori della variabile indipendente per cui per la funzione è definita, può essere un qualsiasi numero reale.
Considerato un valore della variabile indipendente X0, a cui, secondo la funzione, corrisponde un valore della variabile dipendente Y0, se a valori di x via via indefinitamente più vicini a X0 corrispondono valori di y via via indefinitamente più vicini a Y0, la funzione si dice continua in X0.

Poiché l'insieme dei valori della variabile indipendente x è denso, per una funzione continua anche l'insieme dei valori che assume la variabile indipendente y è denso: dati due valori, vicini quanto si vuole, fra essi esistono comunque infiniti valori che la variabile può assumere.
Che le funzioni somma siano continue per ogni x è evidente. P. es. per la funzione somma y = x+5 ponendo x =1 si ha X0 =1 e Y0 =6 ed è evidente che a x via via indefinitamente più vicine a 1 corrispondono y via via indefinitamente più vicine a 6, visto che la differenza fra i valori delle due variabili è costantemente uguale a 5.
Ma poiché le varie operazioni aritmetiche non sono altro che estensioni dell'operazione somma, o le loro operazioni inverse, le precedenti considerazioni si estendono a tutte le funzioni aritmetiche, le quali, per i valori della variabile x per cui sono definite, sono continue.
Che le funzioni trigonometriche siano continue per ogni x per cui sono definite, si comprende immediatamente dalla loro rappresentazione grafica.
Oltre alle funzioni aritmetiche elementari e alle funzioni trigonometriche, per le ragioni sopra esposte, sono continue (per i valori della variabile x per cui sono definite) anche le funzioni composte con operazioni aritmetiche fra funzioni elementari e funzioni trigonometriche, visto che le funzioni composte non sono altro che sequenze di funzioni elementari. P. es. y = sin[log(2; sqrt(x-1))] è definita per x >1 perché l'argomento del logaritmo deve essere >0. Inoltre i suoi valori sono compresi fra 1 e -1 perché la funzione principale è una funzione seno e oscilla in modo periodico fra tali valori. La funzione è continua, quindi i valori di x e y sono densi.

GRAFICI DI FUNZIONE

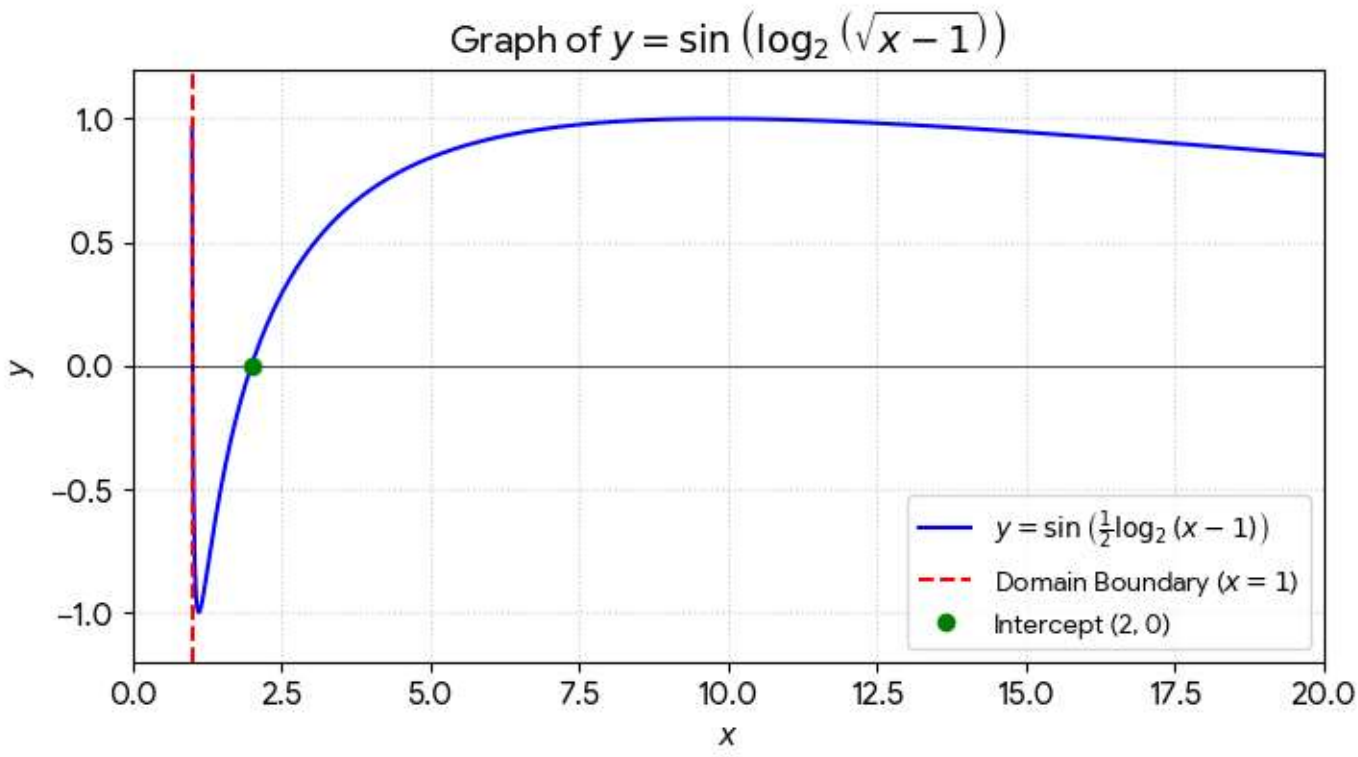
Le funzioni di 2 variabili possono essere rappresentate visivamente da grafici in un piano definito da due rette numeriche perpendicolari (assi cartesiani), in cui l'asse orizzontale rappresenta la variabile indipendente e l'asse verticale la variabile dipendente. L'intersezione degli assi (origine) corrisponde al valore 0 di entrambe le variabili. A ogni punto degli assi, secondo l'unità di misura scelta, corrisponde un numero reale che individua un valore della variabile. I punti del piano, individuati dall'intersezione delle perpendicolari ai 2 assi, tracciate dai punti dei 2 assi corrispondenti ai valori delle variabili, danno il grafico della funzione.

I grafici di funzioni continue, per cui i valori delle variabili dipendente e indipendente sono densi, sono curve continue senza buchi o salti.

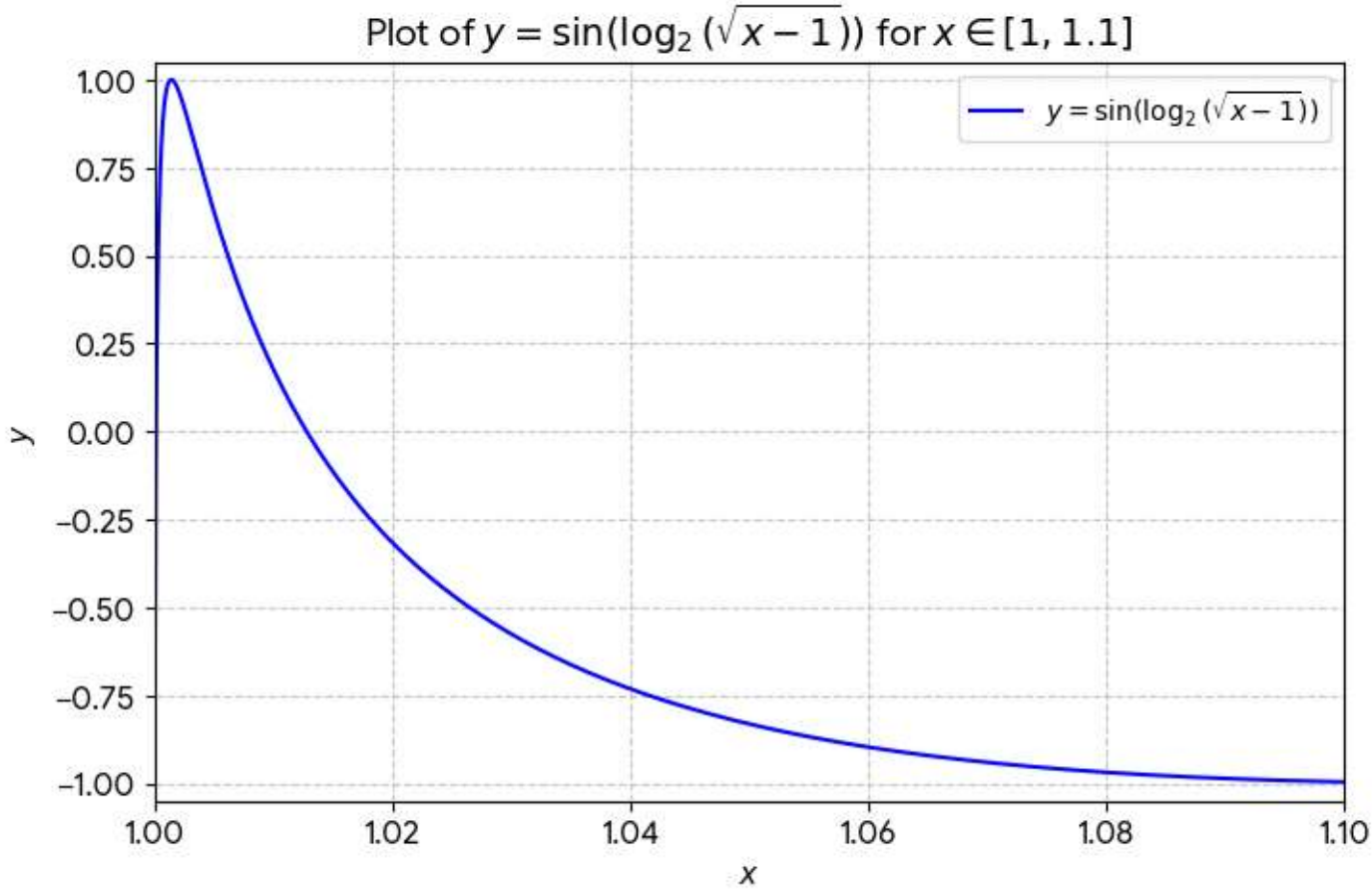
I grafici delle funzioni sono utilissimi per ottenere una comprensione visiva immediata della relazione fra le variabili.

Oggi è facile visualizzare i grafici di funzioni anche complesse, utilizzando siti internet quali WolframAlpha, Google Search o siti di intelligenza artificiale (IA).

Per visualizzare il grafico di una funzione normalmente il comando da impartite è plot(funzione). P. es. per la funzione considerata in precedenza plot y = sin[log(2; sqrt(x-1))].

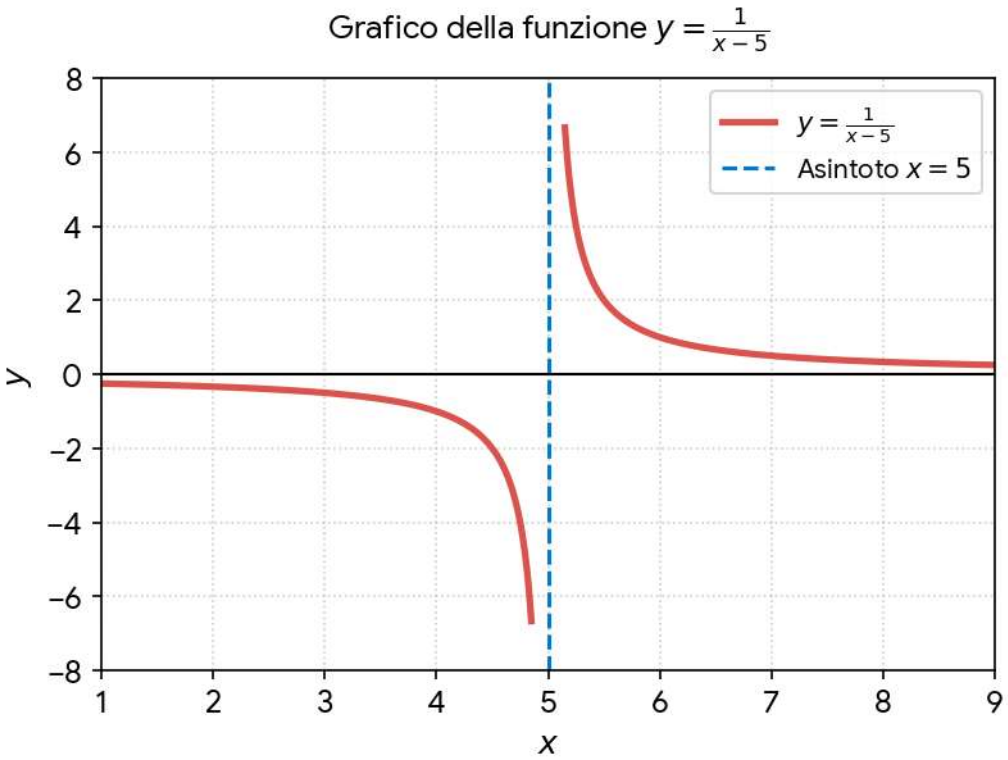


Se si desidera raffinare la visualizzazione limitandola ad alcuni intervalli delle variabili (fra X1 e X2 e/o fra Y1 e Y2), il comando da impartite normalmente è plot(funzione), x=X1...X2, y=Y1...Y2.
P. es. per la funzione considerata in precedenza il grafico ottenuto non mostra chiaramente l'andamento iniziale, quindi per comprendere come varia inizialmente la funzione è opportuno raffinare la visualizzazione con plot y=sin[log(2; sqrt(x-1))], x=1...1.1 (nella notazione internazionale e internet la virgola decimale , si indica con un punto . quindi 1,1 si deve scrivere 1.1).

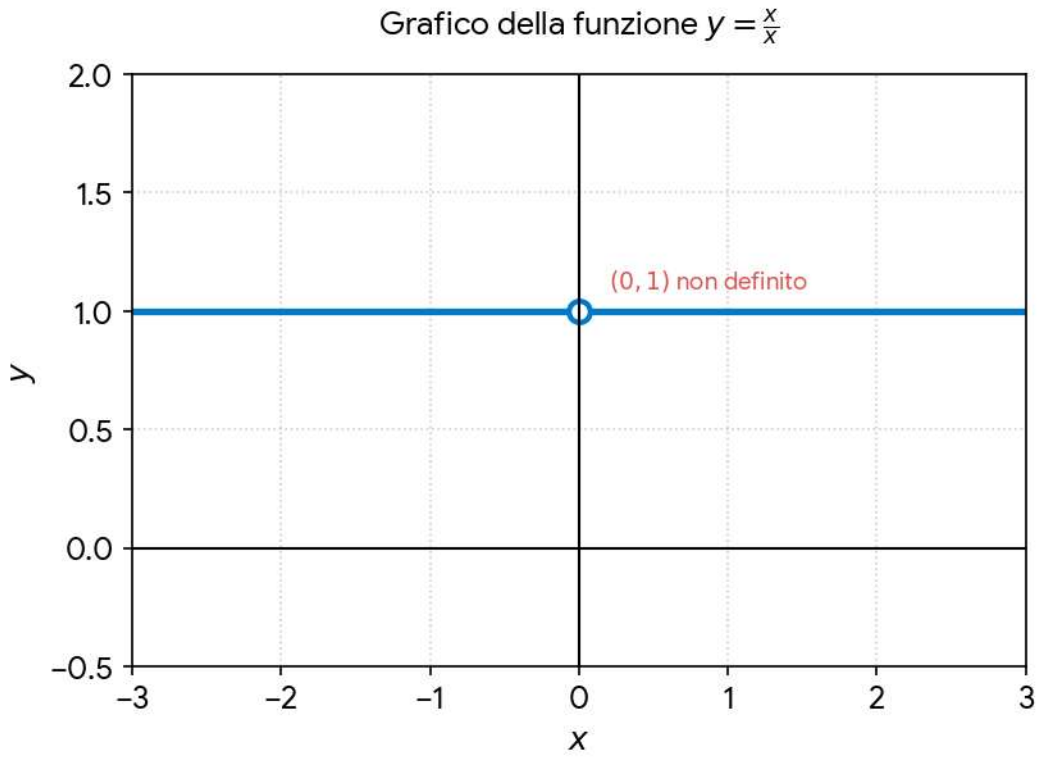


Data una funzione, per comprenderla la prima cosa da fare è ottenere il grafico ed esaminarlo, per vederne l'andamento generale, in quali punti è o non è definita, in quali punti è discontinua, in quali punti è angolosa (non liscia), dove ha massimi e minimi, i tratti dove è crescente e decrescente, dove è convessa e concava, dove ha curvatura più o meno accentuata, se ha asintoti per x che tende all'infinito, ecc.

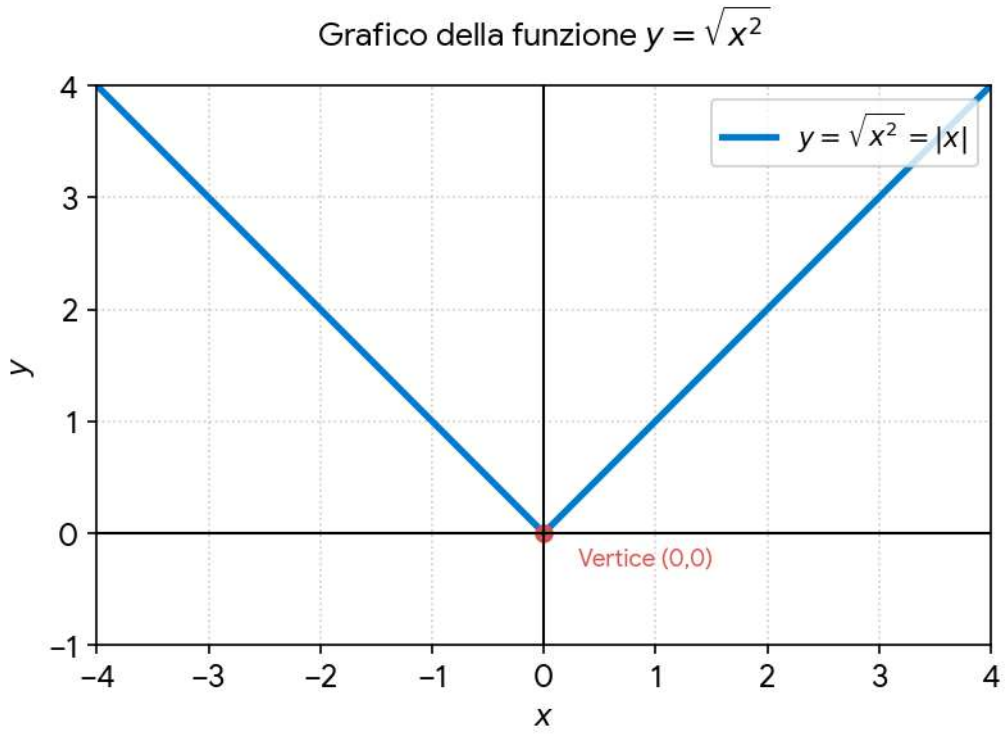
Ecco alcuni esempi:
Il grafico della funzione y = 1/(x-5) mostra che non è definita per x =5 (quindi è anche discontinua per x =5), visto che per x =5 il denominatore della frazione si annulla. Per valori di x che tendono a 5 la funzione tende a valori infinitamente negativi (–inf) o infinitamente positivi (+inf) e la funzione si avvicina indefinitamente alla retta verticale x =5, cioè ha tale retta come asintoto (verticale). Per valori di x che tendono a –inf e +inf la funzione si avvicina indefinitamente alla retta orizzontale y =0, cioè ha tale retta come asintoto (orizzontale). La curva (cioè la funzione) è liscia, cioè non presenta angoli, ovunque è definita. Non ha massimi o minimi. È sempre decrescente negli intervalli in cui è definita –inf < y <5 e 5 < y <+inf. È concava per x <5 e convessa per x >5. La curvatura è più accentuata per x =4 e x =6.



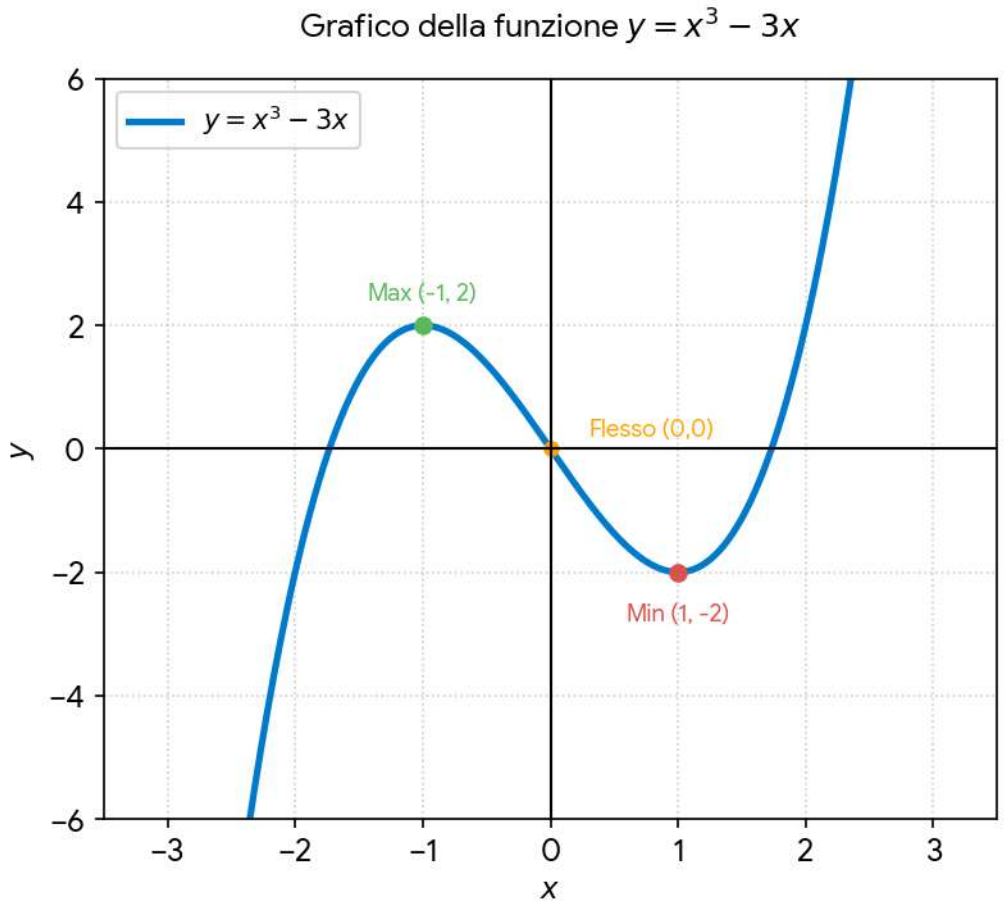
Il grafico della funzione y = x/x mostra che non è definita per x =0, visto che la funzione diventa 0/0 che è un valore indeterminato, mentre per ogni altra x è y =1.



Il grafico della funzione y = sqrt(x^2), detta anche “valore assoluto di x” e indicata anche con y =|x|, mostra che non è liscia, ma ha un angolo per x =0.



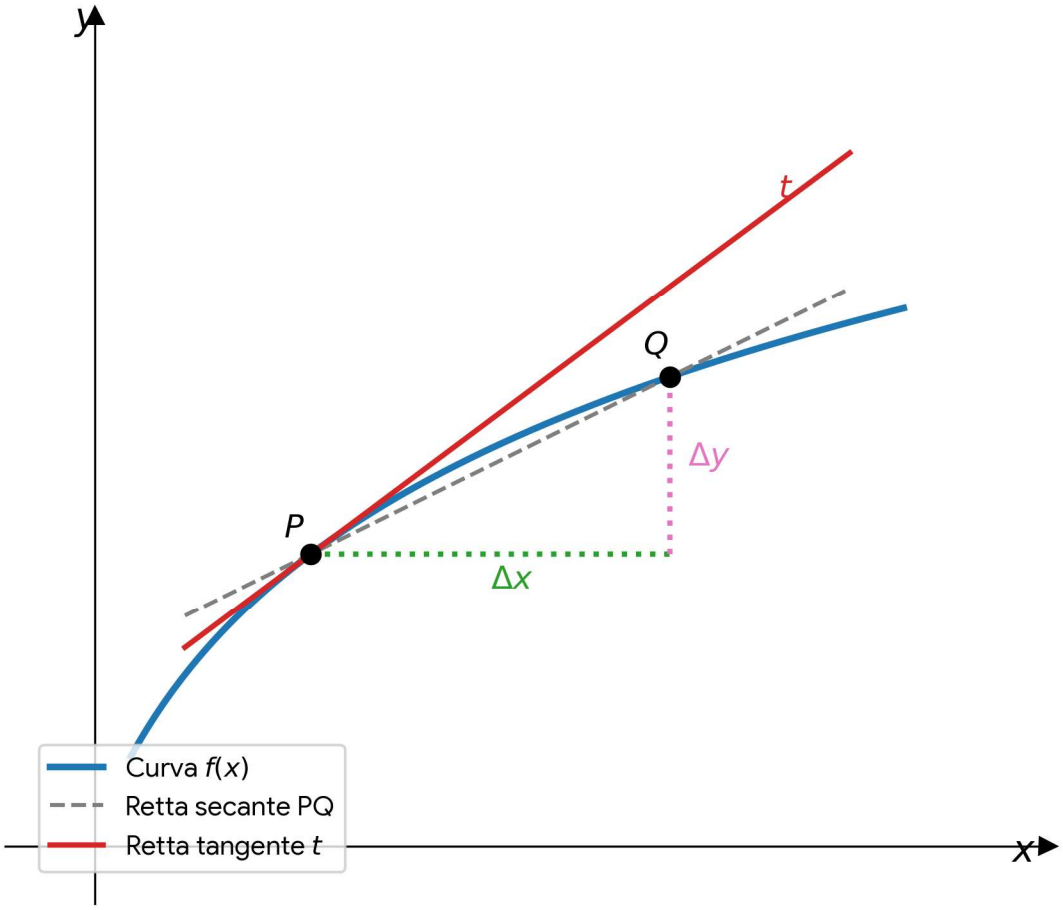
Il grafico della funzione y = x^3 -3x mostra che la funzione è illimitata (non ha massimi e minimi assoluti), poiché per x che tende a valori infinitamente negativi o positivi, anche y tende a valori infinitamente negativi o positivi. Ma ha un massimo relativo in (-1,2), perché intorno a quel punto la funzione ha valori inferiori a quello che ha in quel punto. E ha un minimo relativo in (1,-2), perché intorno a quel punto la funzione ha valori superiori a quello che ha in quel punto.
La funzione da –inf a 0 è concava e da 0 a +inf è convessa.



DERIVATA

Data una funzione, se intorno a un punto di essa la curva che la rappresenta è liscia (cioè il punto non è il vertice di un angolo), allora in quel punto esiste una unica retta tangente alla curva, cioè una retta che tocca la curva in un solo punto, senza intersecarla.

La tangente trigonometrica (cioè il valore numerico della operazione trigonometrica tangente) dell'angolo che la tangente geometrica (la retta), tracciata per il punto di tangenza, forma con l'asse delle ascisse, è dato dall'incremento delle ordinate diviso l'incremento delle ascisse relativo a un generico altro punto sulla tangente rispetto al punto di tangenza, ed è costante. Il punto di tangenza sulla curva e il valore della tangente trigonometrica individuano esattamente la tangente geometrica tracciata per quel punto.



Data una curva, come in figura sopra, e un punto P di essa per cui è tracciata la tangente, calcoliamo la tangente trigonometrica della retta tangente per P.

Prendiamo un punto Q sulla curva vicino a P. La tangente trigonometrica della secante PQ è data dall'incremento delle ordinate diviso l'incremento delle ascisse relativi al segmento PQ, cioè Δy/Δx.

Spostiamo il punto Q via via più vicino a P: la secante si avvicina via via alla retta tangente fino a che, quando Q coincide con P, si sovrappone e identifica con essa.

Ma il rapporto degli incrementi delle ordinate e delle ascisse, che dà il valore della tangente trigonometrica della tangente geometrica, non è calcolabile quando Q coincide con P, perché Δy/Δx diventa 0/0 che è un valore indeterminato.

Ma visto che la retta tangente per il punto P esiste, allora via via che Q si avvicina indefinitamente a P, Δy/Δx si avvicina indefinitamente al valore della tangente trigonometrica della tangente geometrica per P, e

d'altra parte Δy/Δx non può avvicinarsi indefinitamente ad altro valore che non sia la tangente trigonometrica della tangente geometrica per P.
Si definisce derivata della funzione f(x) nel punto P, e si indica con d\dx f(x), x=P (notazione riconosciuta da molti siti WEB) il rapporto Δy/Δx degli incrementi delle ordinate e delle ascisse della funzione intorno a P, per Δx che tende a zero (in simboli: Δx-->0), cioè per Δx che si avvicina via via indefinitamente a 0, senza però arrivare ad assumere il valore 0. Se è possibile calcolare tale rapporto in modo da ottenere un valore determinato, evitando, per Δx-->0, di cadere nell'operazione indeterminata 0/0, per quanto detto sopra tale rapporto dà il valore della tangente trigonometrica della tangente geometrica per P.
Se inoltre è possibile calcolare il rapporto Δy/Δx per Δx-->0, per un punto generico della curva (quindi per un valore qualsiasi della variabile indipendente x), anziché per uno specifico punto P, la derivata di una funzione di x sarà a sua volta una funzione di x. La funzione derivata di y(x) si indica con d\dx y(x), oppure con dy/dx, oppure, sottintendendo che y è funzione di x, con y'.

Esempio. Calcolare la funzione derivata di y = x^2.
Il rapporto degli incrementi delle ordinate e delle ascisse della funzione per un generico punto della curva con ascissa x è Δy/Δx = ((x +Δx)^2 -x^2)/Δx = (x^2 +2x*Δx +(Δx)^2 -x^2)/Δx = (2x*Δx +(Δx)^2)/Δx = 2x +Δx.
Per Δx-->0 si ha che 2x +Δx --> 2x, quindi Δy/Δx --> 2x, cioè d\dx x^2 = 2x (la funzione derivata di x^2 è 2x).
Ciò significa che p. es. la tangente geometrica alla curva che rappresenta la funzione y = x^2, passante per il punto della curva di ascissa 3 e di ordinata 3^2 = 9, cioè il punto (3,9), ha tangente trigonometrica 2x = 2*3 =6.

Con procedimento concettualmente analogo a questo si determinano le funzioni derivate per le funzioni elementari e le combinazioni di funzioni, in modo che per ogni funzione espressa analiticamente è possibile esprimere analiticamente la funzione derivata.
Per ottenere la funzione derivata di una funzione oggi non è più necessario effettuare calcoli manuali complessi, ma si possono comodamente utilizzare siti quali WolframAlpha, Google Search, ecc. oppure vari siti di intelligenza artificiale (IA). Per esempio d\dx (3x^2 +1)*e^(-2x) = (- 6x^2 +6x-2)*e^(-2x).

Una nota interessante. Dai calcoli emerge che la funzione derivata di una funzione esponenziale y = a^x è la stessa funzione esponenziale moltiplicata per una costante, cioè d\dx a^x = k*(a^x), questa è la ragione per cui la funzione esponenziale descrive matematicamente molti fenomeni nei quali il tasso di variazione (cioè la derivata della funzione) è proporzionale alla quantità effettivamente presente (cioè al valore della funzione), come vedremo. Per valori piccoli della base a (si ricordi che la funzione esponenziale è definita solo se la sua base è >0), risulta che k <1 e quindi la funzione derivata è minore della funzione originaria, invece per valori grandi della base a, risulta che k >1 e quindi la funzione derivata è maggiore della funzione originaria. Il "valore di equilibrio" della base, per cui risulta che k =1 e quindi la funzione derivata è uguale alla funzione originaria, è il numero e =2,71828182846... Cioè y = e^x è la funzione per cui la sua funzione derivata è uguale alla funzione stessa, in simboli d\dx e^x = e^x. Questa è la ragione per cui nel calcolo infinitesimale si usa normalmente come base della funzione esponenziale il numero e: così facendo le operazioni di derivata e integrale danno risultati espressi in forma matematica più semplice. Discorso analogo vale anche per la funzione inversa della funzione esponenziale, cioè la funzione logaritmo, quindi nel calcolo infinitesimale anche per la funzione logaritmo si usa normalmente come base il numero e. Il logaritmo con base e è detto "logaritmo naturale" e si indica con ln, cioè ln(x) = log(e; x).

TASSO DI VARIAZIONE ISTANTANEO - VELOCITA ISTANTANEA

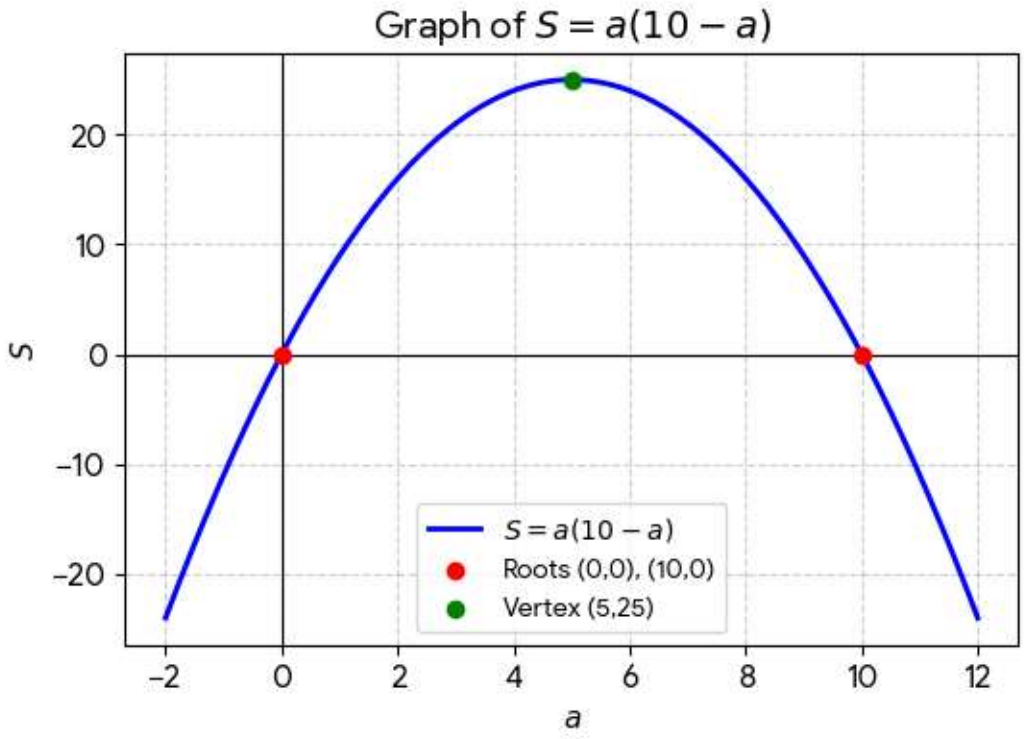
Abbiamo visto che la derivata di una funzione f(x) nel punto P è data dal rapporto Δy/Δx degli incrementi delle ordinate e delle ascisse della funzione intorno a P, per Δx che tende a zero. Ma il rapporto degli incrementi Δy/Δx è il tasso di variazione della funzione. Quindi la derivata può essere interpretata anche come il tasso di variazione della funzione in un dato punto. Pertanto, se la variabile indipendente x rappresenta lo scorrere del tempo, come avviene nella rappresentazione matematica di molti fenomeni naturali e sociali, la derivata esprime il tasso di variazione **istantaneo**, cioè la velocità di variazione **istantanea,** di una grandezza in un certo istante.

MASSIMI E MINIMI

Utilizzando la derivata si possono calcolare i massimi e minimi di una funzione, un problema che la sola algebra (cioè le equazioni) non può risolvere. Ciò si ottiene perché in punti di massimo e minimo la tangente geometrica alla curva è orizzontale, quindi la derivata è =0.

Esempio. Calcolare l'area massima di un rettangolo di perimetro 20.

se a =lato minore, b =lato maggiore e S =area si ha il sistema 2(a+b) =20; S = ab. Ricavando b = 10-a dalla prima equazione e sostituendo tale valore nella seconda equazione si ha S = a(10-a). Calcoliamo la derivata di S: d\da a(10-a) = 10-2a. I valori per cui tale derivata si annulla danno i massimi e minimi di S, quindi poniamo 10-2a =0 e vediamo che il valore di a per cui la derivata di S si annulla è a =5. Per verificare che per tale valore S abbia un massimo (e non un minimo) e tale massimo sia unico tracciamo il grafico della funzione: plot S = a(10-a). Il grafico conferma che l'area massima si ottiene per a =5, il che implica che anche b =5 e quindi che, a parità di perimetro, il rettangolo con area massima è il quadrato.

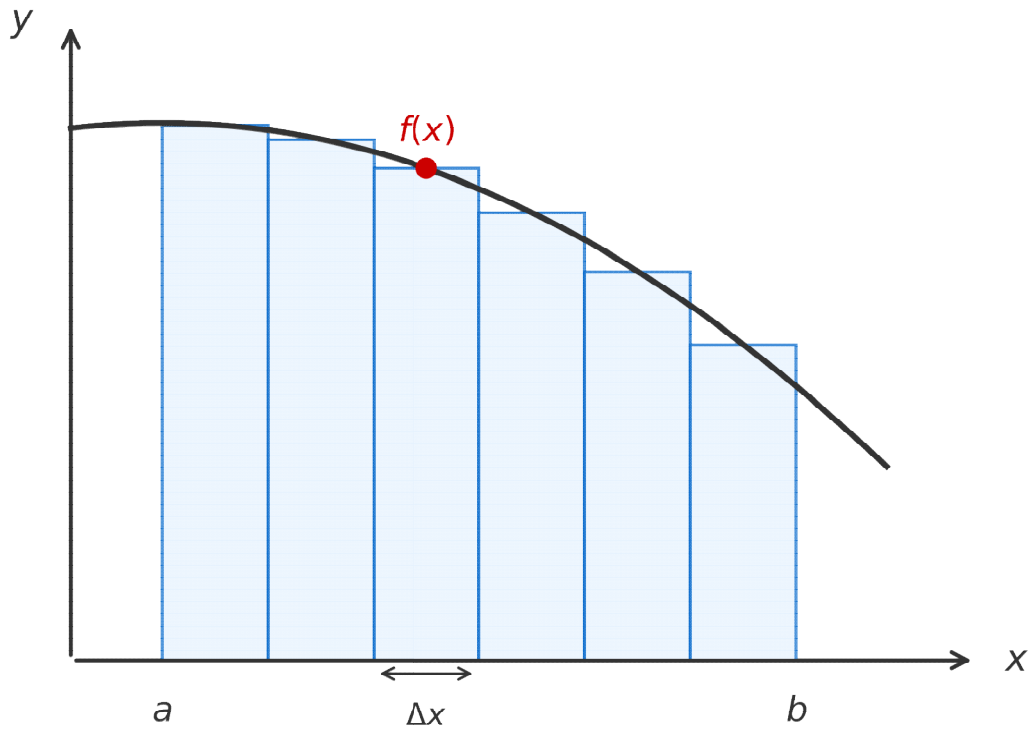


INTEGRALE

Data una funzione e la curva che la rappresenta, per il tratto della curva compreso fra le ascisse x =a e x =b, si vuole calcolare l'area compresa fra la curva e l'asse delle ascisse.

Si può approssimare il valore di tale area dividendo il tratto a..b in segmenti di larghezza Δx, e per ogni segmento alzare un rettangolo tale che il suo lato superiore intersechi la curva, come in figura sotto. L'area di uno qualsiasi di questi rettangoli sarà Δx*f(x), con x compresa all'interno del rispettivo segmento Δx.

L'area totale sottostante la curva sarà approssimata dalla somma delle aree di tutti i rettangoli compresi nel tratto a..b.



Diminuendo via via la larghezza dei segmenti Δx, la somma delle aree di tutti i rettangoli approssima sempre più l'area totale sottostante la curva. Diminuendo indefinitamente la larghezza dei segmenti Δx, la somma delle aree di tutti i rettangoli si avvicina indefinitamente al valore dell'area sottostante la curva, e, visto che tale area esiste, non può assumere altro valore che quello di tale area.

Si definisce integrale della funzione f(x) dall'estremo inferiore a all'estremo superiore b, e si indica con int f(x) dx, x=a..b (notazione riconosciuta da molti siti WEB) la somma delle aree dei rettangoli Δx*f(x), con x compresa all'interno del rispettivo segmento Δx, per Δx che tende a zero (in simboli: Δx-->0), senza però arrivare ad assumere il valore Δx =0.

Se è possibile calcolare tale somma in modo da ottenere un valore indipendente da Δx, ma dipendente solo da a e b, per quanto detto sopra tale somma, per il tratto della curva compreso fra le ascisse x =a e x =b, dà il valore dell'area compresa fra la curva e l'asse delle ascisse.

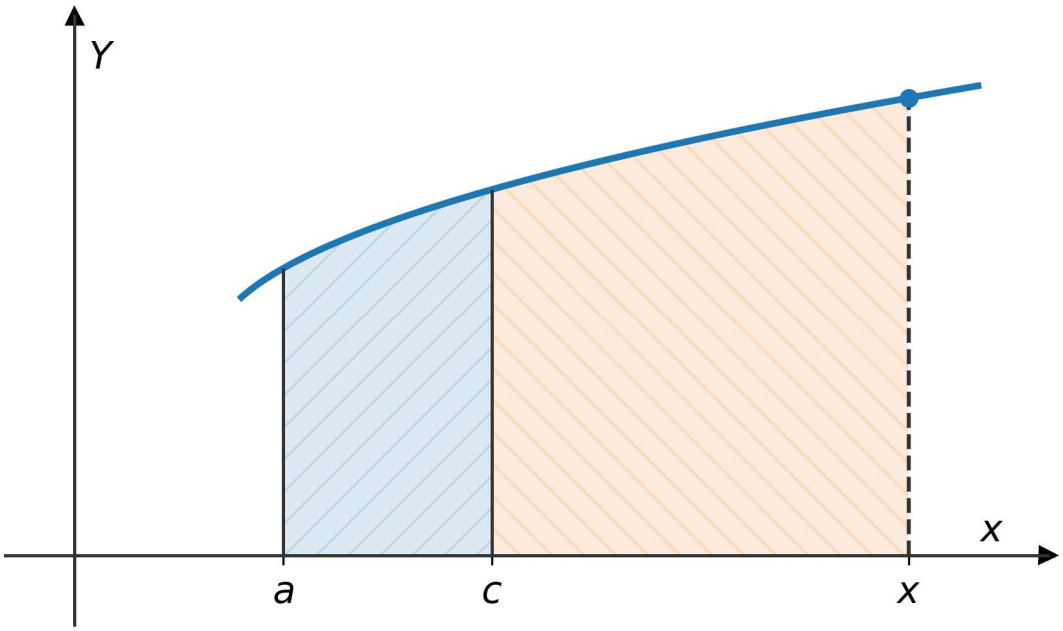
Dalla rappresentazione grafica sopra si comprende che:

1) prendendo un ascissa c intermedia fra a e b (a < c < b), l'integrale di una funzione da a a b è uguale alla somma degli integrali da a a c e da c a b, cioè int f(x) dx, x=a..b = (int f(x) dx, x=a..c) + (int f(x) dx, x=c..b),

2) l'integrale di una funzione in cui estremo inferiore e superiore coincidono, cioè da a ad a, è =0, perché non rappresenta alcun tratto di curva e quindi alcuna area ad esso sottesa, cioè int f(x) dx, x=a..a =0,
3) per quanto sopra, l'integrale di una funzione da a a b, sommato all'integrale della stessa funzione da b ad a, è uguale all'integrale della funzione da a ad a, cioè =0. Ne consegue che l'integrale da a a b è l'opposto dell'integrale da b ad a, cioè se si invertono gli estremi di integrazione l'integrale di una funzione cambia segno, quindi int f(x) dx, x=a..b = -int f(x) dx, x=b..a,
4) nei tratti dell'intervallo di integrazione a..b in cui la funzione ha valori positivi l'integrale è positivo, nei tratti in cui la funzione ha valori negativi l'integrale è negativo.

FUNZIONE INTEGRALE

Se l'estremo superiore di integrazione, invece di assumere un valore fisso (b nel caso precedentemente esaminato) assume il valore variabile della variabile indipendente x, l'area sottostante la curva f(x), nel tratto a..x è una funzione di x, cioè int f(x) dx, x=a..x è una funzione di x (attenzione: in questa notazione la variabile indipendente della funzione integrale è la x estremo di integrazione, non la x che compare in f(x) e dx, che si scrivono così solo per convenzione).
Se prendiamo una ascissa c (diversa da a, p.es. a < c < x) e si considera l'area sottostante la curva f(x), nel tratto c..x, tale funzione, cioè int f(x) dx, x=c..x, differirà dalla prima per il valore dell'area sottesa alla curva f(x) nel tratto a..c, che è un valore costante, cioè per quanto visto sopra int f(x) dx, x=a..x = (int f(x) dx, x=a..c) + (int f(x) dx, x=c..x), in cui int f(x) dx, x=a..c è un valore costante.
Pertanto tutte le funzioni integrale di una funzione f(x) costituiscono una famiglia di funzioni che differiscono fra loro per una costante (che dipende dal valore dell'estremo inferiore di integrazione della singola funzione integrale).



DERIVATA DELLA FUNZIONE INTEGRALE – INTEGRALE INDEFINITO

Calcoliamo la funzione derivata di una funzione integrale. La derivata è data dal rapporto fra l'incremento delle ordinate e l'incremento delle ascisse, per l'incremento delle ascisse che tende a zero (Δy/Δx per Δx-->0), per una generica ascissa x. Nel caso della funzione integrale, come mostra la figura sotto, l'incremento delle ordinate, cioè dell'area sottostante la curva, quando si incrementa una generica ascissa di Δx è f(x)*Δx, quindi la derivata della funzione integrale è f(x)*Δx/ Δx per Δx-->0, cioè è f(x). E ciò è vero per qualsiasi funzione integrale di f(x), indipendentemente dall'estremo inferiore di integrazione, perché l'incremento della funzione integrale non dipende dall'estremo inferiore di integrazione.

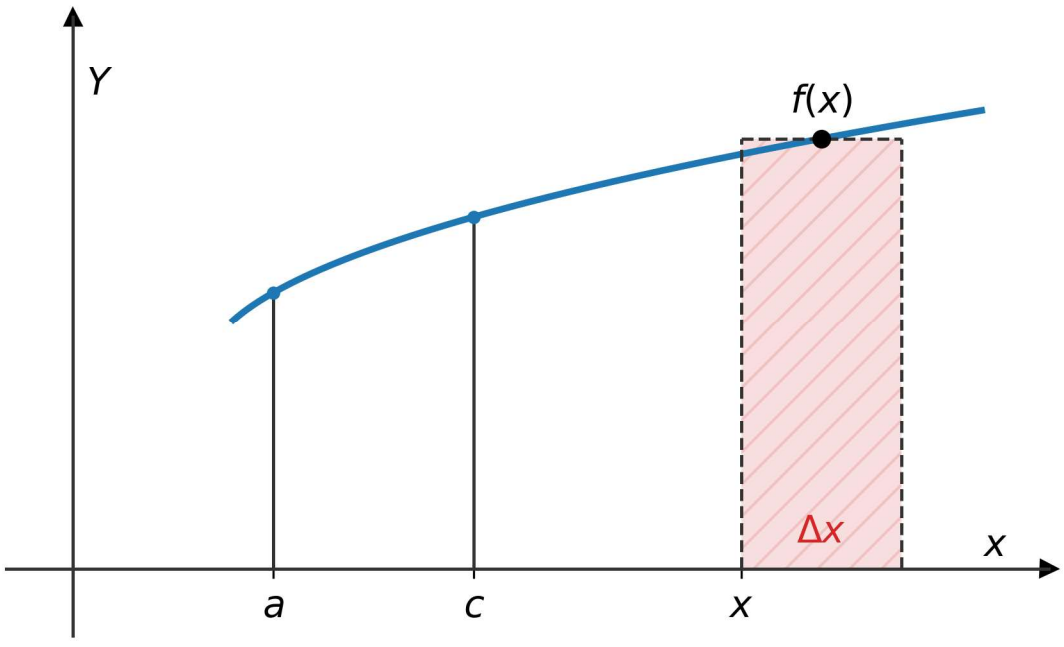
Si ha quindi l'importante proprietà, detta teorema fondamentale del calcolo infinitesimale, che la derivata di una funzione integrale della funzione f(x), e di ogni altra funzione integrale della stessa famiglia, che differisce dalla funzione integrale considerata solo per una costante, è data dalla stessa funzione integranda f(x), cioè derivata e integrale sono operazioni fra loro inverse.

Ciò è molto comodo, perché conoscendo la derivata di una funzione permette, leggendo al contrario la formula di tale derivata, di considerare la derivata come funzione e la funzione come funzione integrale, e quindi poter ottenere la formula della funzione integrale di una funzione.

Per esempio, abbiamo precedentemente calcolato che la derivata di x^2 è 2x, cioè d\dx x^2 = 2x. Quindi, leggendo al contrario tale formula si ottiene che la funzione integrale di 2x è x^2 + C, dove C indica una generica costante, determinabile conoscendo l'estremo inferiore di integrazione della particolare funzione integrale che ci interessa considerare.

In questo modo, a partire dalle formule delle funzioni derivate si ottengono le formule delle funzioni integrali di funzioni elementari, e a partire da queste si possono calcolare funzioni integrali di funzioni più complesse.

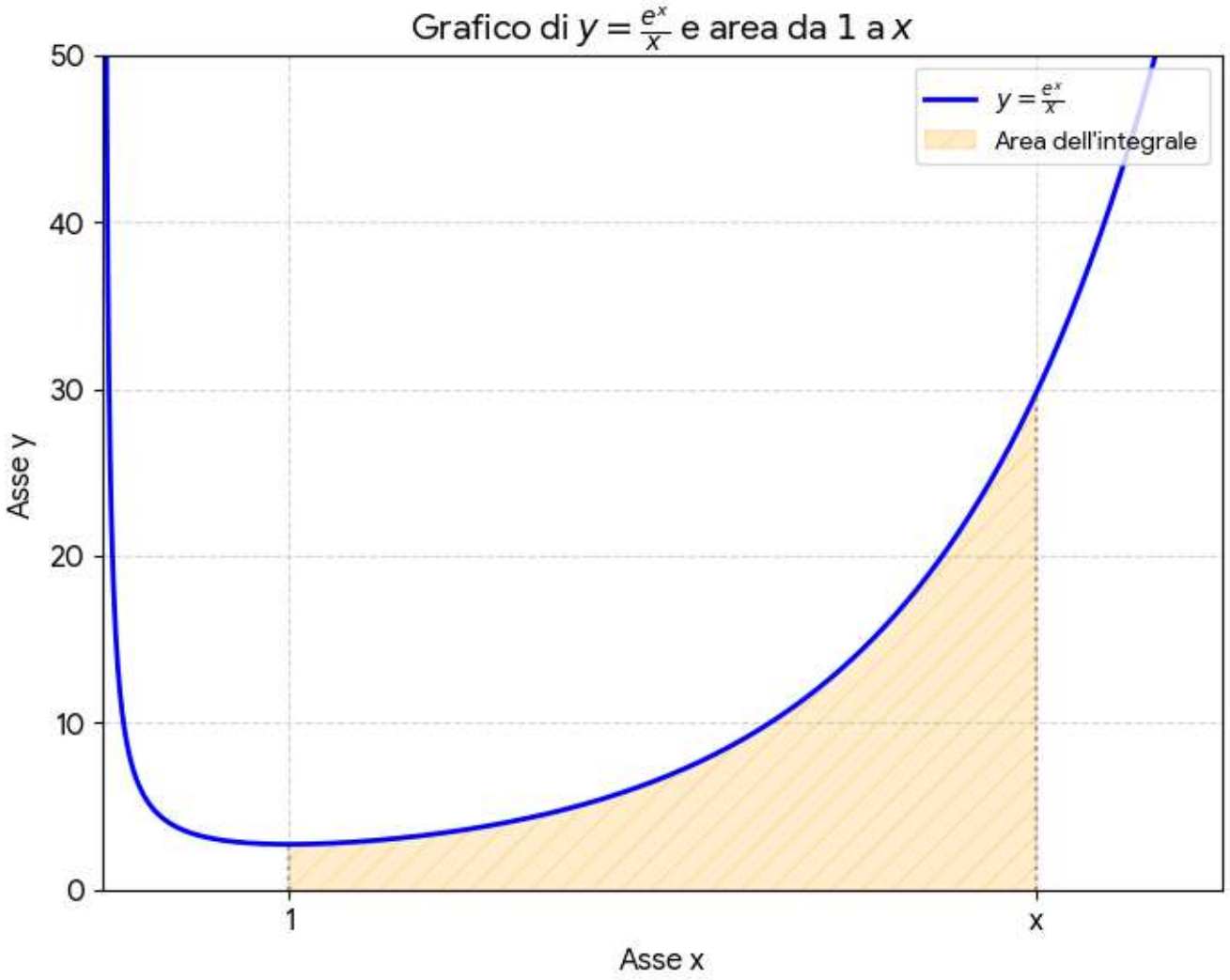
Si chiama integrale indefinito di f(x), e si indica con int f(x) dx (senza indicazione degli estremi di integrazione), notazione riconosciuta da molti siti WEB, la famiglia di funzioni integrale di f(x), che differiscono solo per una costante, quindi la funzione integrale precedentemente calcolata in simboli si scrive int 2x dx = x^2 + C.



Adesso, a partire dall'integrale indefinito di una funzione f(x), che è una famiglia di curve che si differenziano fra loro per una costante, calcoliamo la particolare funzione integrale individuata da un certo estremo inferiore di integrazione.
Cioè per int f(x) dx = F(x) + C, dove F(x) è una funzione la cui derivata è f(x), dobbiamo calcolare il valore della costante C quando l'estremo inferiore dell'integrale assume un certo valore a. Tale calcolo è immediato, visto che per x =a la nostra particolare funzione integrale avrà valore 0, dato che estremo inferiore e superiore dell'integrale coincidono. Quindi per la funzione integrale il cui estremo inferiore è uguale ad a si ha F(a) + C =0, cioè C = -F(a). Segue che la particolare funzione integrale che ha estremo inferiore uguale ad a è F(x) - F(a), ricavata comodamente dalla formula dell'integrale indefinito di una funzione, a sua volta ricavata comodamente dalle formule inverse delle funzioni derivate.
Per esempio, abbiamo visto che l'integrale indefinito di 2x è x^2 + C (in simboli int 2x dx = x^2 + C). Se p. es. vogliamo calcolare la particolare funzione integrale che abbia estremo inferiore =0, tale particolare funzione sarà F(x) - F(0) = (x^2) - (0^2) = x^2.
Se poi dalla funzione integrale, con estremo inferiore di integrazione a, vogliamo calcolare il valore di un integrale con estremo superiore di integrazione b, cioè l'area sottostante la curva della funzione integranda nel tratto a..b, nella precedente formula dobbiamo porre x =b, cioè int f(x) dx, x=a..b = F(b) - F(a). Per esempio, considerando ancora l'esempio precedente, l'area sottostante alla curva y = 2x fra x =0 e x =3 è F(3) - F(0) = 3^2 = 9. In simboli int 2x dx, x=0..3 = 9.

Per ottenere gli integrali indefiniti e definiti di una funzione oggi non è più necessario effettuare calcoli manuali complessi, ma si possono comodamente utilizzare siti quali WolframAlpha, Google Search, ecc. oppure vari siti di intelligenza artificiale (IA). Per esempio: (integrale indefinito) int (3x^2 +1)*e^(-2x) dx = -(6x^2 +6x +5)*e^(-2 x)/4 + C, (integrale definito) int (3x^2 +1)*e^(-2x) dx, x=1..5 = 0.57308...

Una nota interessante. Mentre per funzioni espresse analiticamente (cioè espresse come combinazione di funzioni semplici, quali polinomi, logaritmi o funzioni trigonometriche), anche complesse, è sempre possibile esprimere la funzione derivata in forma analitica, ciò non è vero per la funzione integrale di molte funzioni espresse analiticamente: la funzione integrale esiste ma non è esprimibile come combinazione di funzioni semplici. Per esempio, per la funzione y = e^x/x, l'integrale indefinito int e^x/x dx e le particolari funzioni integrale ad esso associate non possono essere espresse tramite funzioni elementari, sebbene tali funzioni integrale esistano, come mostra il grafico sotto, in cui l'area tratteggiata rappresenta il valore della funzione integrale con estremo inferiore di integrazione 1 (cioè y = int e^x/x dx, x=1..x). I software consentono comunque agevolmente di calcolare i valori di tali funzioni integrale e di tracciarne i grafici. P. es. il valore della funzione integrale che stiamo esaminano per x =5 è int e^x/x dx, x=1..5 = 38.29016... L'istruzione per tracciare il grafico della funzione integrale è plot int e^x/x dx, x=1..x, che molti siti di intelligenza artificiale riconoscono.



Utilizzando gli integrali si possono risolvere problemi che la sola algebra (cioè le equazioni) non può risolvere.

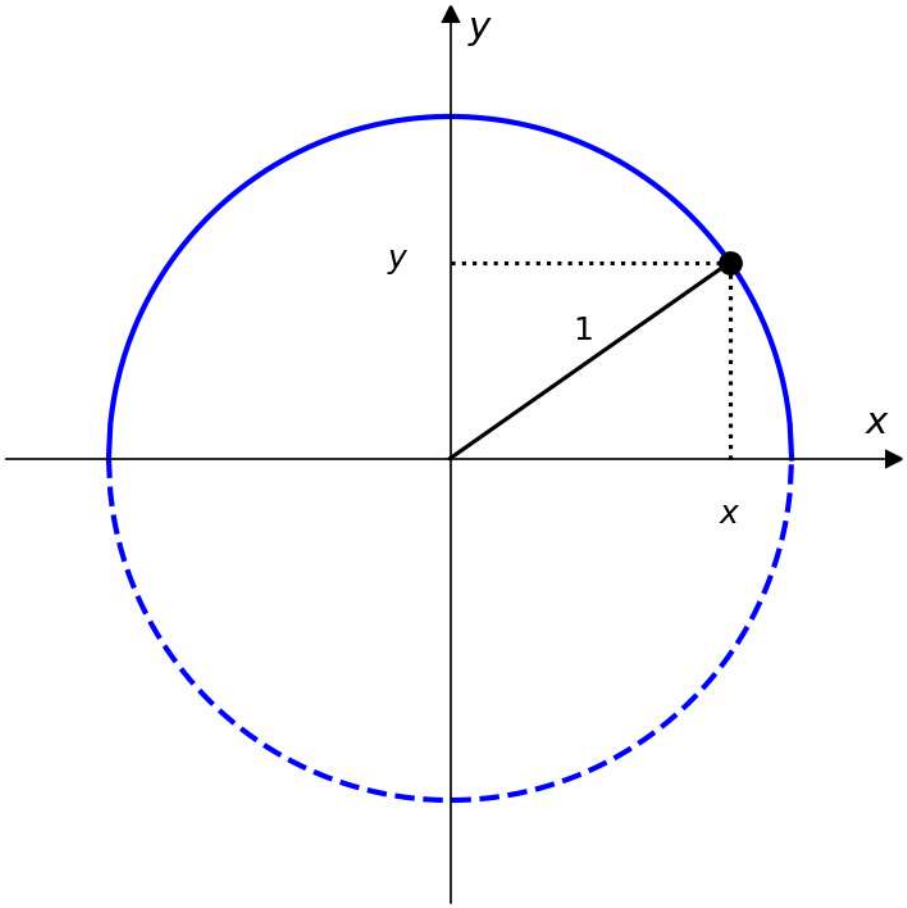
AREA LIMITATA DA UNA CURVA

L'integrale di una funzione, come abbiamo visto, dà l'area compresa fra la curva descritta da tale funzione e l'asse delle ascisse.

Supponiamo per esempio di voler calcolare l'area della circonferenza di raggio 1 (vedi figura sotto). Dati due assi cartesiani, applicando il teorema di Pitagora si ricava che un generico punto distante 1 dall'origine, quindi posto sulla circonferenza con centro nell'origine e raggio 1, ha coordinate date dall'espressione y^2 + x^2 = 1, cioè dato un valore di x, che corrisponde a un punto sulla circonferenza (quindi x è compresa fra -1 e +1), dall'espressione si ottiene il valore di y per quel punto.

Dalla precedente espressione si ricava che la funzione della curva che rappresenta la metà superiore della circonferenza è y = sqrt(1-x^2).

Dalla teoria degli integrali sappiamo che l'integrale di tale funzione fra -1 e +1 (int sqrt(1-x^2) dx, x= -1..1) dà l'area sottesa alla curva, che è metà dell'area della circonferenza. Quindi, visto che int sqrt(1-x^2) dx, x= -1..1 = pi/2 otteniamo che l'area della circonferenza di raggio 1 è uguale a pi.



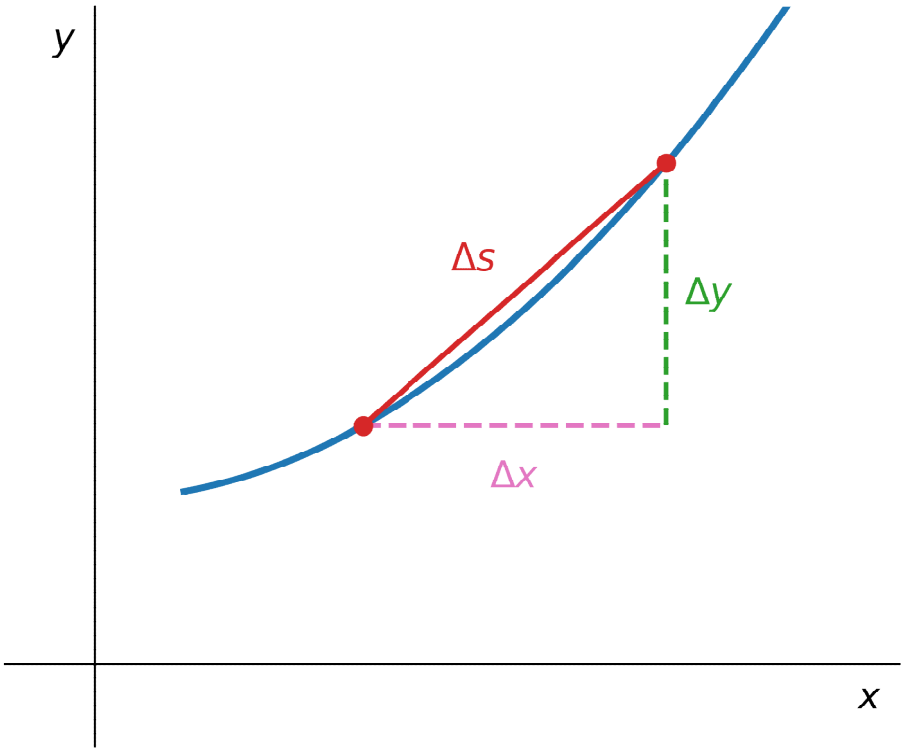
LUNGHEZZA DI UNA CURVA

Per la lunghezza di un segmento Δs fra due punti di una curva (vedi figura sotto), applicando il teorema di Pitagora, vale la relazione Δs^2 = Δx^2 + Δy^2. Quindi la lunghezza del segmento è Δs = sqrt(Δx^2 + Δy^2). Moltiplicando e dividendo per Δx il secondo membro dell'uguaglianza si ottiene Δs = sqrt(Δx^2 + Δy^2)*Δx/Δx = sqrt[1+ (Δy/Δx)^2]*Δx.

Ora, per ottenere la lunghezza di una curva fra due punti a e b occorre dividere il tratto di curva in tanti segmenti Δs e sommare le loro lunghezze: più i segmenti saranno piccoli, più saranno numerosi e meglio approssimeranno la lunghezza del tratto di curva, e se la loro lunghezza tenderà a 0, la somma delle loro lunghezze si avvicinerà indefinitamente alla lunghezza del tratto di curva.

Ma dall'espressione precedente Δs = sqrt[1+ (Δy/Δx)^2]*Δx si ha che se Δs-->0 allora anche Δx-->0, quindi Δy/Δx diventa la derivata dy/dx, e la somma dei prodotti del secondo membro dell'uguaglianza per ogni differente Δx, corrispondente a ogni differente Δs, diventa l'integrale della funzione sqrt[1+ (dy/dx)^2] fra gli estremi a e b. Quindi la lunghezza del tratto di curva fra a e b è data da int sqrt[1+ (dy/dx)^2] dx, x=a..b.

Per esempio, la lunghezza del tratto di curva y = x^2 compreso fra le ascisse 1 e 5 è data da int sqrt[1+ (d\dx x^2)^2] dx, x=1..5 = 24.3953...



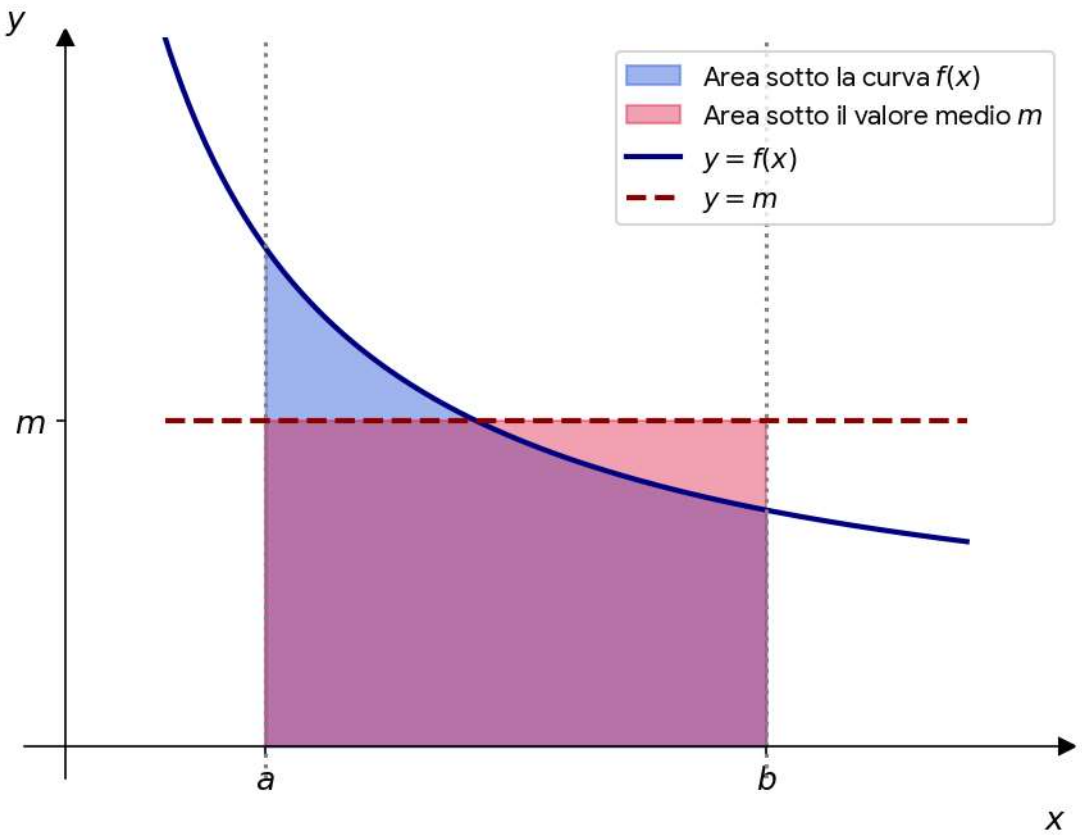
VALORE MEDIO DI UNA CURVA

Per i numeri, il valor medio fra n numeri è quel numero tale che la somma degli n numeri è uguale alla somma di n volte il valor medio.

Per una funzione, il valor medio del tratto di una curva fra 2 ascisse è l'altezza di quella retta orizzontale che genera un rettangolo con la stessa area sottesa a quella sottesa alla curva (vedi figura sotto).

Quindi il valor medio m del tratto di curva descritta dalla funzione f(x) fra le ascisse a e b è dato dall'area sottostante la curva (l'integrale della funzione fra a e b) diviso la distanza fra le ascisse (b-a), distanza che corrisponde alla lunghezza della base del rettangolo che ha per altezza il valor medio, cioè m = (int f(x) dx, x=a..b)/(b-a).

Per esempio, il valor medio del tratto di curva y = x^2 compreso fra le ascisse 1 e 5 è m = (int x^2 dx, x=1..5)/(5-1) = 10.3333...



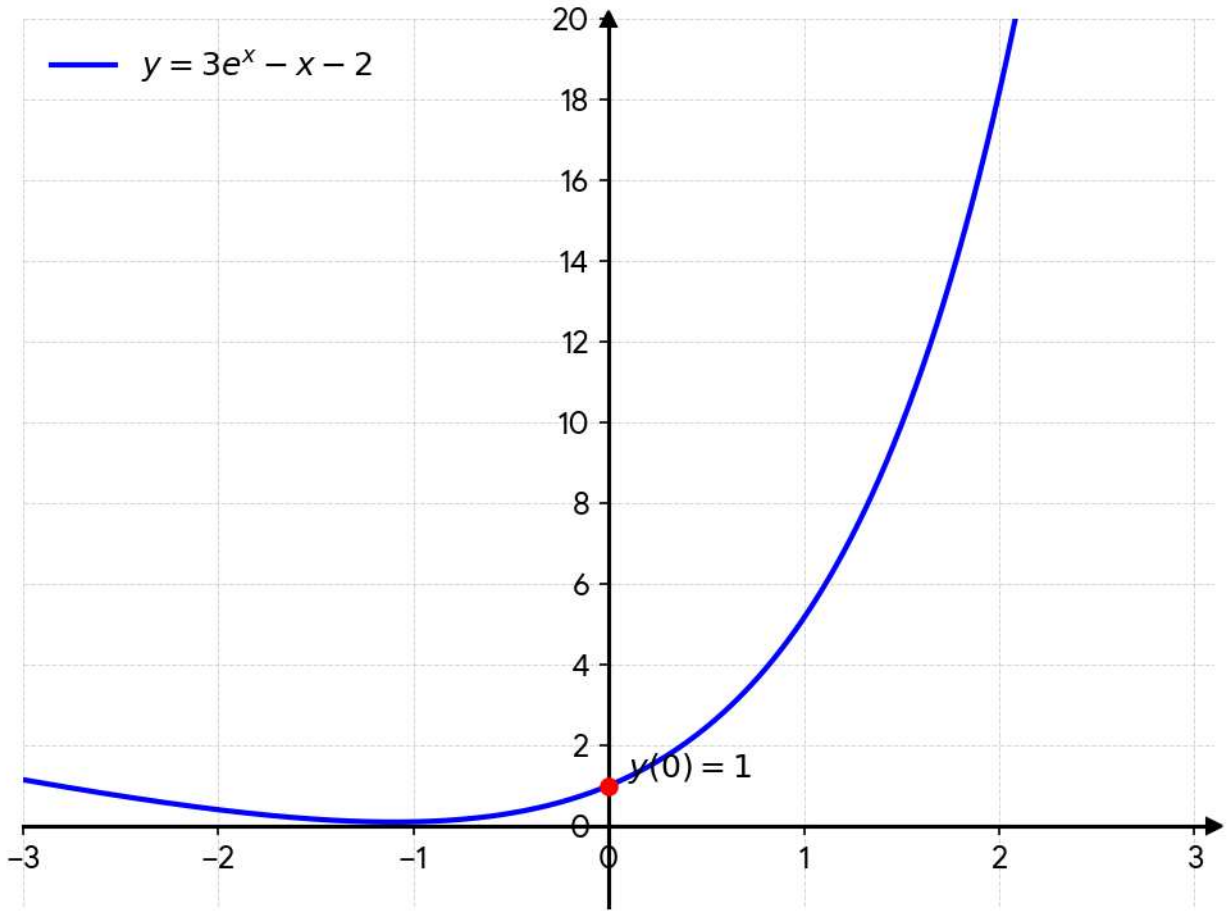
EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Le equazioni differenziali (ED) sono equazioni in cui la derivata di una funzione y'(x), cioè il tasso di variazione della variabile dipendente rispetto alla variabile indipendente, è uguale a una espressione che può contenere sia la variabile dipendente y(x) che quella indipendente x. Per esempio y' = y+x+1 è una equazione differenziale.

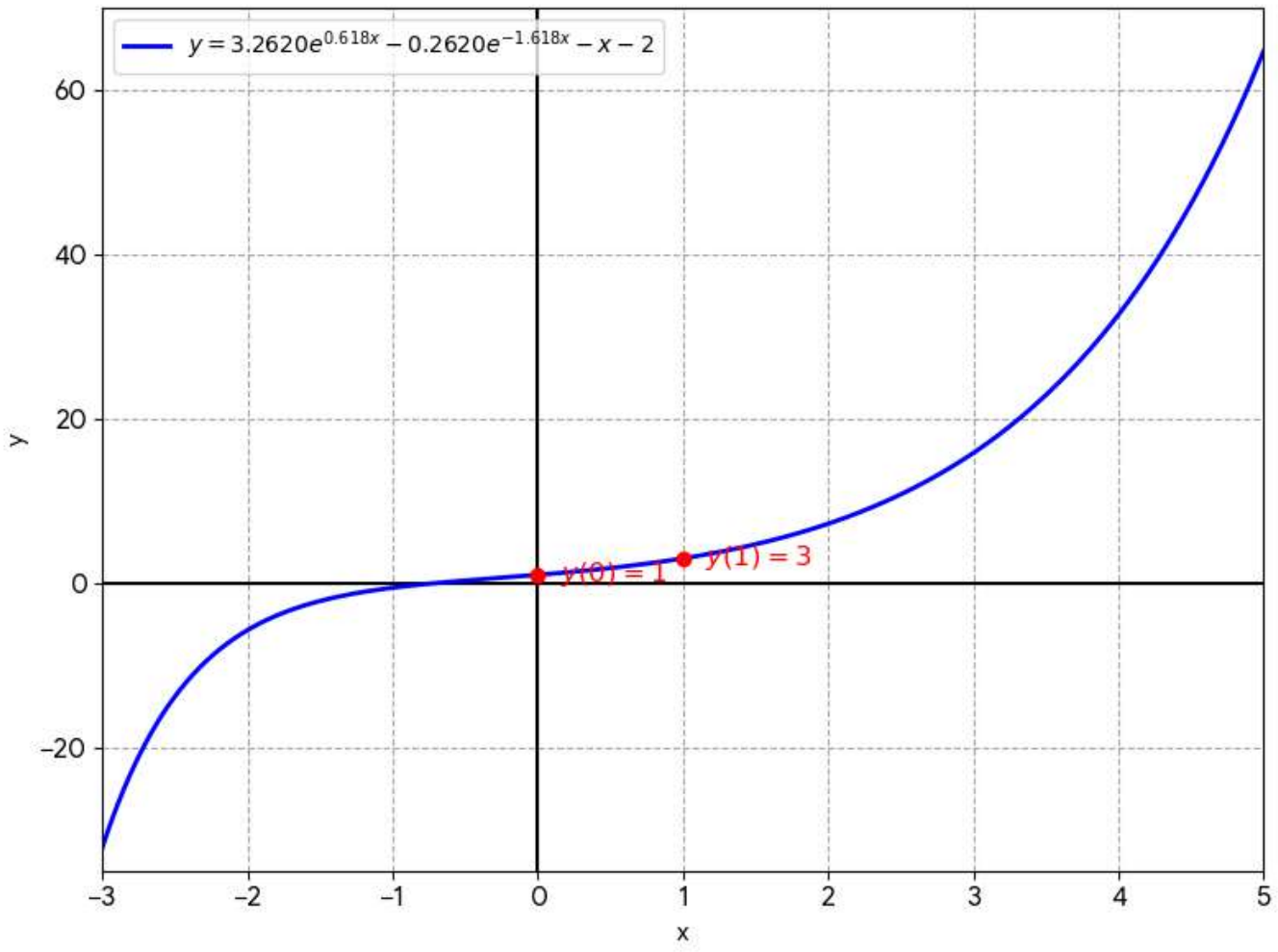
Risolvere una ED significa trovare la funzione y(x) che soddisfa la suddetta uguaglianza.

Le ED sono uno strumento matematico molto utile, soprattutto in campo scientifico, perché dalla conoscenza di un dato locale e circoscritto, come un tasso di variazione, ricavabile dall'osservazione o dall'esperimento, permettono di risalire al comportamento complessivo di una grandezza. Per esempio,

avendo stabilito sperimentalmente che l'accelerazione gravitazionale sulla superficie terrestre è costante, visto che l'accelerazione è la derivata della velocità, e che a sua volta la velocità è la derivata dello spazio percorso da un corpo, risolvendo equazioni differenziali è possibile ricavare le funzioni che descrivono in modo completo le traiettorie dei proiettili in dipendenza del tempo!
Il procedimento per la soluzione delle ED consiste essenzialmente nel calcolo di un integrale indefinito, per eliminare la derivata ed arrivare a una semplice relazione fra variabile dipendente e indipendente, da cui poi si possa ricavare la soluzione in forma esplicita. Ne segue che, così come accade per l'integrale indefinito, anche la soluzione di una ED contiene di norma una costante.
La soluzione generale della ED del nostro esempio, definita a meno di una costante, è y = Ce^x -x-2, e rappresenta la soluzione degli infiniti problemi particolari la cui traduzione in forma matematica è appunto data dell'equazione y' = y+x+1.
Per ottenere la soluzione di un singolo problema particolare, occorre ricavare il valore della costante C per mezzo di ulteriori dati di tale problema. P es. se per il nostro problema particolare si ha y(0) =1, inserendo tale dato nella soluzione generale si ricava C =3 e la soluzione particolare diventa y = 3e^x -x-2.
Un tempo per risolvere le ED si doveva ricorrere a complicate procedure manuali di calcolo. Oggi i più comuni siti di intelligenza artificiale (IA) risolvono per noi velocemente le ED, evitandoci possibili errori e perdite di tempo, e forniscono anche un commento della procedura che hanno utilizzato e dei risultati ottenuti. Nel caso poi si desiderino informazioni ulteriori, è possibile ottenerle dialogando con la IA.
Io solitamente utilizzo CLAUDE. Per risolvere la precedente ED ho dato il comando:
"Risolvi y' = y+x+1. Risolvila anche per y(0) =1 e traccia il grafico"



Nelle ED, oltre alla derivata y', possono comparire anche le derivate di ordine superiore della funzione (derivata seconda y'', terza y''', ecc.). In tal caso il procedimento per la soluzione consiste essenzialmente nel calcolo di più integrali indefiniti, per eliminare tutte le derivate dei vari ordini e arrivare a una semplice relazione fra variabile dipendente e indipendente, e poter ricavare la soluzione in forma esplicita. Ne segue che anche la soluzione generale di tali ED conterrà di norma più costanti. Per ottenere la soluzione di un singolo problema particolare, occorre poi ricavare il valore delle costanti per mezzo di più dati di tale problema particolare.
Per esempio y''+y' = y+x+1 è una ED del secondo ordine, in quanto vi compare la derivata seconda. La soluzione generale è y = Ce^[(-1 +sqrt5)/2] + Ke^[(-1 -sqrt5)/2] -x-2. Per ottenere la soluzione particolare del problema di nostro interesse occorre indicare due dati del problema in modo da ricavare il valore delle constanti C e K. P.es. se dal nostro problema sappiamo che y(0) =1 e y(1) =3, la soluzione particolare è y ≈ 3,2620e^(0,618x) −0,2620e^(-1,618x) −x−2.



In generale le ED, come le equazioni algebriche, possono avere una soluzione generale, più soluzioni generali, o nessuna soluzione. Se hanno soluzioni, come avviene per gli integrali, non sempre queste possono essere espresse analiticamente (cioè come combinazione di funzioni semplici). In tal caso i software consentono comunque di calcolare i valori di tali funzioni non analitiche e di tracciarne i grafici.

SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Come per le equazioni algebriche, anche per le ED, se più equazioni differenziali condividono le stesse funzioni incognite, così che non si può risolverle una alla volta, ma solo tutte insieme, si ha un sistema di ED.

Per esempio, le ED

x'(t) = y

y'(t) = -x

in cui x(t) e y(t) sono entrambe funzioni di t, e le loro derivate dipendono dall'altra funzione, formano un sistema di ED.

La soluzione generale del sistema è

x(t) = Acos(t) + Bsin(t)

y(t) = −Asin(t) + Bcos(t)

Per ottenere la soluzione particolare del problema di nostro interesse occorre indicare due dati del problema in modo da ricavare il valore delle constanti A e B. P.es. se dal nostro problema sappiamo che x(0) =1 e y(0) =2, la soluzione particolare è

x(t) = cos(t) + 2sin(t)

y(t) = - sin(t) + 2cos(t)

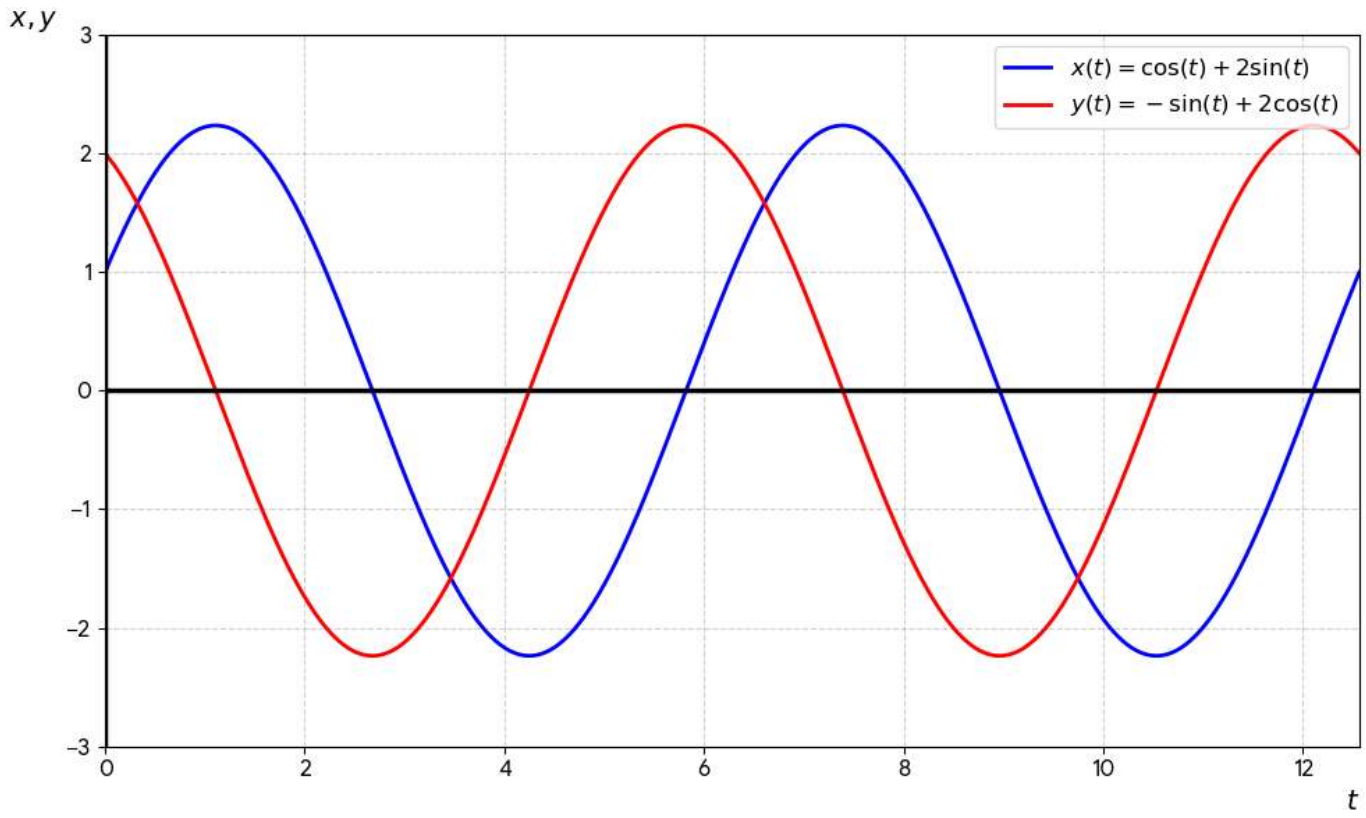
Per risolvere il prededente sistema di ED ho dato a CLAUDE il comando:

"Risolvi il sistema

x'(t) = y

y'(t) = -x

Risolvilo anche per x(0) =1, y(0) =2 e traccia il grafico"



DAL PROBLEMA ALLA IMPOSTAZIONE DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Supponiamo di avere investito un capitale di 100.000 Euro a un tasso di interesse del 5% annuo, e reinvestiamo alle stesse condizioni, aggiungendoli al capitale, gli interessi che via via percepiamo. Come cresce il nostro capitale nel tempo?

Per semplicità di calcolo si suppone che gli interessi vengano pagati e reinvestiti immediatamente: è una assunzione che non comporta scostamenti significativi dal caso reale, in cui gli interessi vengono pagati e reinvestiti semestralmente o annualmente, e la supposizione offre il vantaggio di poter usare funzioni continue e il calcolo infinitesimale.

Indichiamo con y il capitale e poniamo la sua unità di misura uguale a 1000 Euro.

Indichiamo con t il tempo e poniamo la sua unità di misura uguale a 1 anno.

La traduzione in forma matematica del problema porta alla seguente ED

y'(t) = 0,05y

cioè, il tasso di variazione del capitale in un certo istante è pari all'ammontare del capitale in quell'istante, moltiplicato per il tasso di interesse.

La soluzione generale della ED è

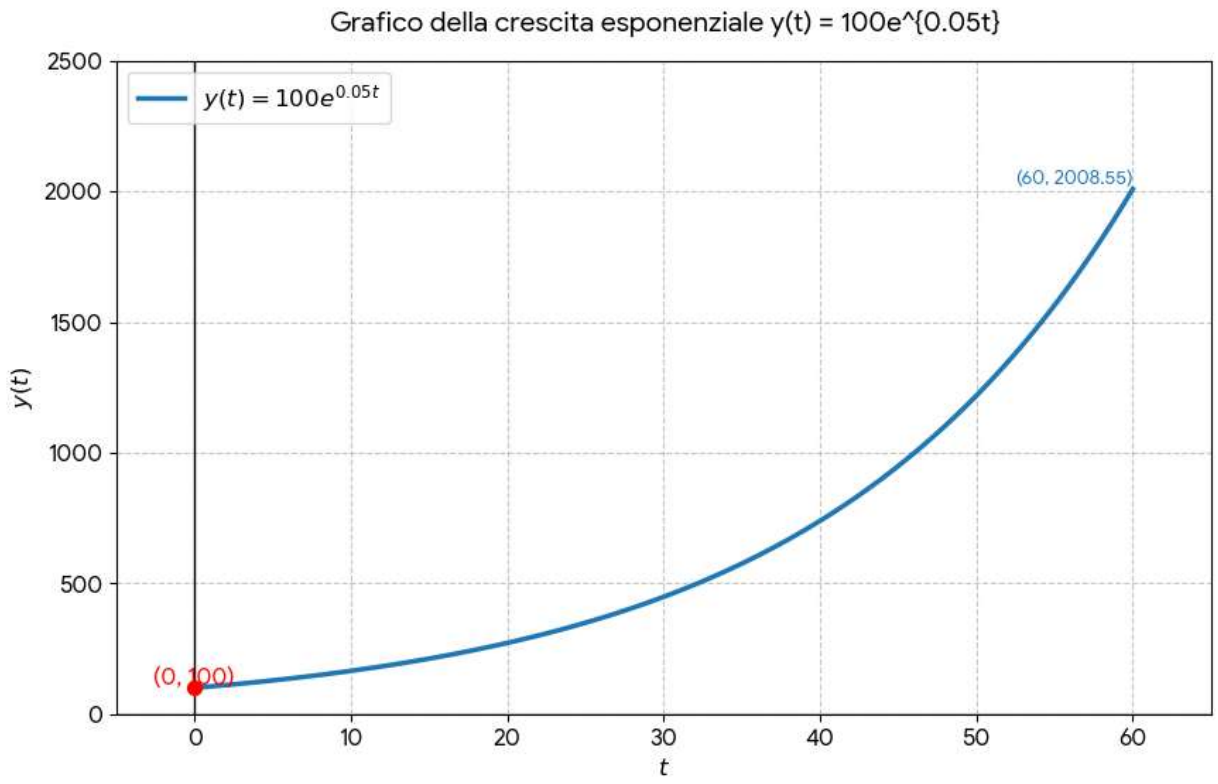
y(t) = Ce^(0,05t)

Per ottenere la soluzione particolare del nostro problema, dal dato che il capitale iniziale è pari a 100.000 Euro, cioè y(0) =100, ricaviamo C =100. Quindi la soluzione particolare è:

y(t) = 100e^(0,05t)

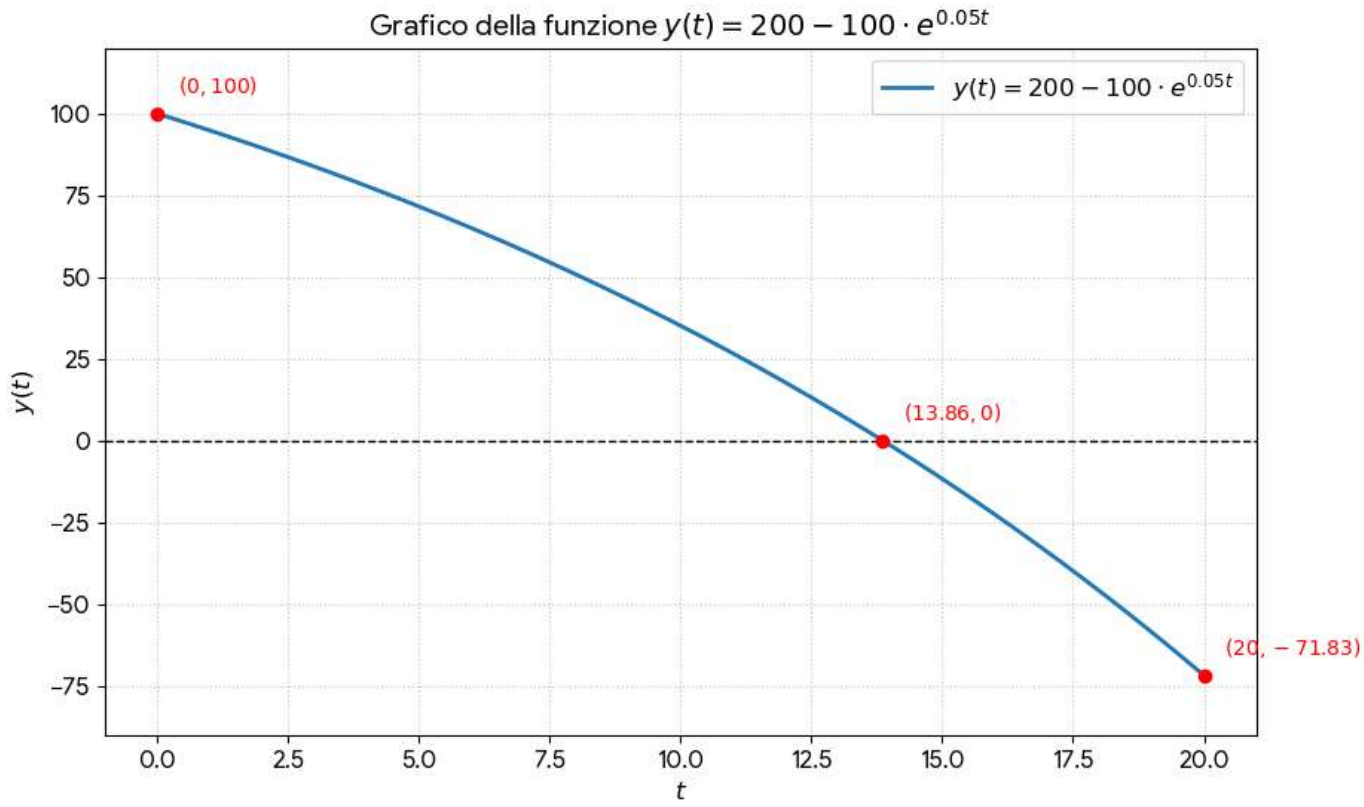
da cui si può ricavare l'ammontare del capitale in qualsiasi istante.

Da un dato locale e circoscritto come un tasso di variazione, la soluzione dell'equazione differenziale fornisce l'andamento globale di una grandezza!



Nota che la semplice equazione y' = Ky (con K costante), che abbiamo appena visto, traduce matematicamente una grande varietà di problemi, perché descrive qualsiasi fenomeno in cui la velocità di variazione è proporzionale alla quantità presente.
Per esempio descrive la crescita di popolazioni di batteri, la diffusione di un'epidemia nella fase iniziale (prima che intervengano limiti alla popolazione infettabile), o anche il decadimento di una sostanza radioattiva (in tal caso il tasso di variazione è negativo e la quantità di sostanza radioattiva diminuisce nel tempo).

Modifichiamo ora il problema precedente, supponendo di prelevare dal capitale ogni anno 10.000 Euro. Di nuovo per semplicità matematica si suppone che i prelievi siano continui e istantanei.
Per tradurre in forma matematica il problema così modificato, occorre cambiare la precedente ED, sottraendo il prelievo annuo costante
y'(t) = 0,05y -10
La soluzione generale della nuova ED è
y(t) = 200 + Ce^(0,05t)
Il capitale iniziale è sempre pari a 100.000 Euro, cioè y(0) =100, da cui si ricava C = -100. quindi la soluzione particolare del nostro problema è
y(t) = 200 -100e^(0,05t)
Dal grafico sotto si vede che a causa dei prelievi il capitale si riduce a zero nel tredicesimo anno.



IMPOSTARE EQUAZIONI CON LA IA

Tradurre un problema concreto in forma matematica, impostando le opportune ED, per problemi anche solo di poco più complessi di quelli appena visti, non è per niente facile. Richiede una lunga esperienza e la conoscenza approfondita delle leggi che regolano i rapporti fra le grandezze in gioco in quello specifico problema (leggi fisiche, chimiche, biologiche, eccetera).

Quindi, anche per tradurre un problema in forma matematica, è conveniente utilizzare i più comuni siti di intelligenza artificiale, descrivendo alla IA il problema e chiedendone la soluzione.

Nel caso che i dati del problema inseriti siano insufficienti, la IA chiederà le integrazioni necessarie, e quindi fornirà la soluzione, con il commento della procedura che ha utilizzato. Se si desiderano informazioni ulteriori, è possibile ottenerle dialogando con la IA.

In generale i problemi che teoricamente si potrebbero risolvere per mezzo delle ED sono quelli in cui si vuol conoscere l'andamento di una grandezza variabile, le cui variazioni sono causate da grandezze a loro volta variabili.

Questa è una categoria enorme di problemi, che comprende praticamente tutti i fenomeni naturali.

In pratica però sono matematicamente risolvibili solo problemi semplici, che implicano un numero limitato di variabili, e che rappresentano una semplificazione schematica e approssimata dei complessi problemi reali, e le soluzioni ottenute sono sempre da verificare sperimentalmente.

Per esempio, supponiamo di avere un secchio pieno d'acqua, forarlo sul fondo in modo che l'acqua fuoriesca, e voler sapere come cala il livello dell'acqua nel tempo.

Questo è un tipico problema traducibile in forma matematica per mezzo di ED, perché la velocità di efflusso dell'acqua è variabile al variare della pressione dell'acqua, che a sua volta diminuisce via via che l'acqua esce, e il livello dell'acqua nel secchio cala.

Chiedo a CLAUDE:

"ho un secchio pieno d'acqua, lo foro sul fondo in modo che l'acqua fuoriesca, come cala il livello dell'acqua nel tempo?"

CLAUDE dà una spiegazione generale del problema fisico. In dialogo con CLAUDE posso eventualmente approfondire alcuni aspetti.

Ammettiamo che io voglia però risolvere il problema relativamente al mio particolare secchio d'acqua.

Chiedo a CLAUDE:

"quali dati ti occorrono per calcolare come cala il livello dell'acqua nel tempo, nel mio secchio d'acqua?"

CLAUDE chiede Altezza iniziale dell'acqua, Sezione del secchio, Diametro (o area) del foro, Forma del foro, Altezza a cui ho fatto il foro.

Dico a CLAUDE:

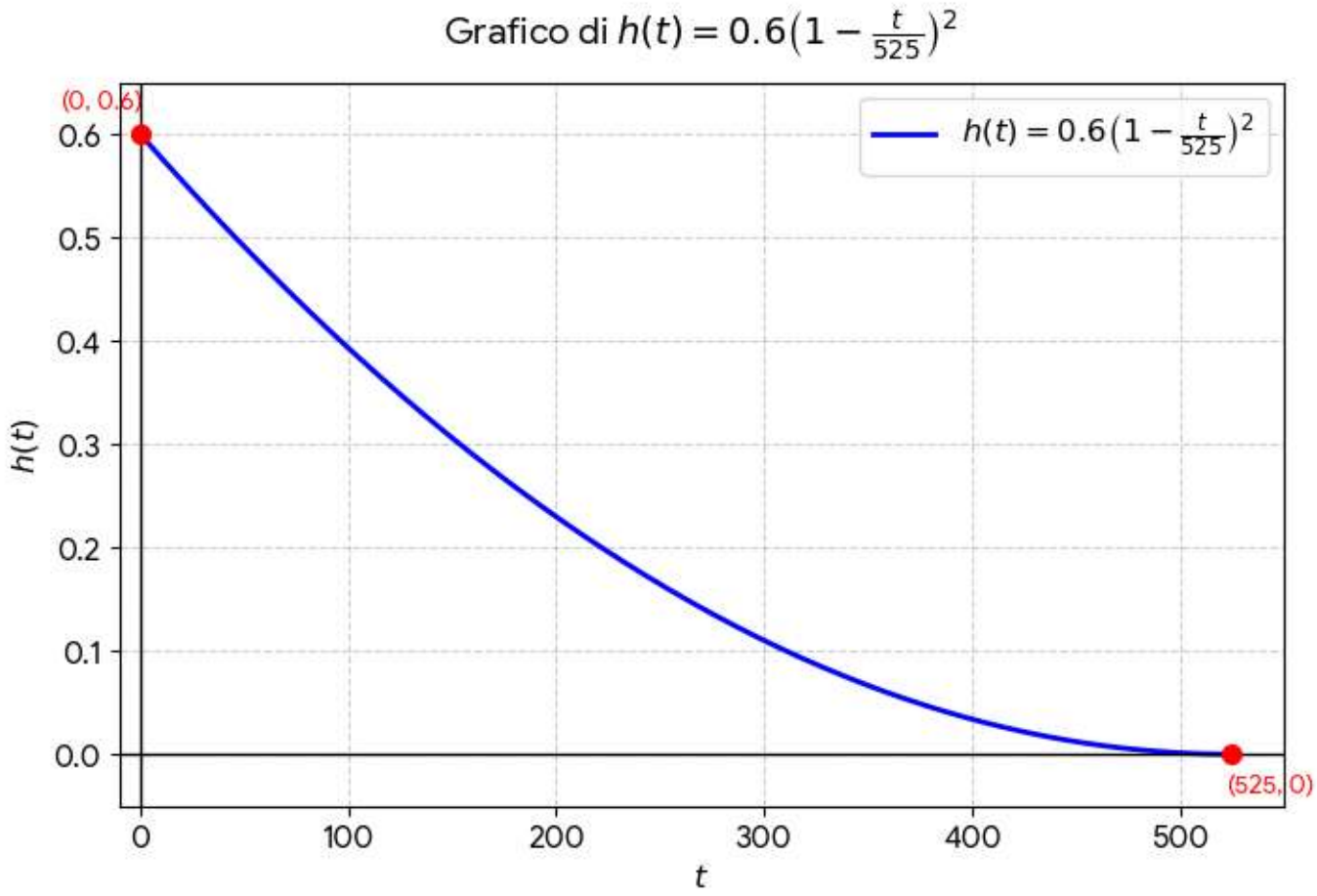
"Altezza iniziale dell'acqua: 60 cm, Sezione del secchio: cilindrica con diametro 30 cm, Diametro del foro: 1 cm, Forma del foro: circolare, Altezza a cui ho fatto il foro: in fondo al secchio"

CLAUDE dà la soluzione:

Tempo totale di svuotamento ≈ 525 secondi, cioè 8 minuti e 45 secondi.

Livello dell'acqua nel tempo: $h(t) = 0{,}6*(1 - t/525)^2$ metri (0,6 è un coefficiente di attrito tipico per questi problemi).

Grafico del livello dell'acqua nel tempo.



Per esercizio, il lettore può provare a tradurre in forma matematica, utilizzando la IA, i seguenti semplici problemi, propedeutici a problemi più complessi.

1) Raffreddamento di una bevanda
Supponiamo di lasciare una tazza di tè bollente sul tavolo.
La temperatura del tè diminuisce tanto meno rapidamente quanto minore è la differenza fra la temperatura del tè e quella della stanza, fino ad arrivare alla stessa temperatura della stanza.

2) Diffusione di una notizia
Supponiamo che in un gruppo di 1.000 persone ogni persona informata della notizia ne informi altre persone.
All'aumentare del numero di persone via via informate, la velocità di diffusione della notizia per un verso aumenta, perché più persone diffondono la notizia, per un altro verso diminuisce, perché restano via via meno persone ancora da informare.

3) Coda all'ufficio postale
Supponiamo che la velocità di servizio dell'impiegato allo sportello sia costante e ci sia un afflusso di clienti inizialmente superiore alla velocità di servizio, ma che diminuisce proporzionalmente alla lunghezza della coda, perché i nuovi clienti più vedono che la coda è lunga, più se ne vanno scoraggiati.

Dopo un certo tempo la coda raggiunge una lunghezza costante.

4) Due negozi vendono gli stessi prodotti e si contendono i clienti
Se i clienti di entrambi i negozi sono soddisfatti, il numero di nuovi clienti di entrambi per un verso tende ad aumentare proporzionalmente al numero dei rispettivi clienti attuali, che fanno pubblicità favorevole al proprio negozio, per un altro verso tende a diminuire proporzionalmente al numero di clienti attuali del negozio concorrente, che fanno pubblicità favorevole al negozio concorrente.
La traduzione matematica di questo problema porta a un sistema di ED.

.....
Per segnalare errori o suggerimenti, scrivi a belliniantonio16071961@gmail.com